

Heinz Salamon

GEOELEKTRISCHE MODELLVERSUCHE MIT EINEM
DREIDIMENSIONALEN WIDERSTANDSNETZWERK

Frankfurt am Main 1962

GEOELEKTRISCHE MODELLVERSUCHE

MIT EINEM DREIDIMENSIONALEN WIDERSTANDSNETZWERK

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

Vorgelegt von: Heinz Salamon

Frankfurt am Main 1962

Gedruckt mit Genehmigung
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Frankfurt am Main

Dekan: Prof. Dr. Karl Egle

1. Referent: Prof. Dr. R. Mügge
2. Referent: Prof. Dr. H. Dänzer

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 1962
Tag der Promotion: 30. Juli 1962



**"Geoelektrische Modellversuche
mit einem dreidimensionalen Widerstandsnetzwerk"**

Berichtigungen:

Seite 14: Zeile 1 zu ergänzen: ... (UEA) (Katalognummer)

Seite 18: Gleichung (23) $\rightarrow f(x_0 + h, y_0, z_0)$ statt
 $f(o + h, y_0, z_0)$

Seite 22: Zeile 14 zu streichen: ... besteht, daß (38)

Seite 38: Zeile 3 nach der Tabelle muß lauten:
... sondern auch die Maschenweiten zwischen
den davon entfernt liegenden Knotenpunkten.

Auf Abb. 13 zu ergänzen:
Die Kurve 3 für $g_1: g_2: g_3 = 1 : 1/10 : 1$ ist
der Kurve UFO der Abb. 5 ($1 : 1/9 : 1$) sehr
ähnlich.

Seite 42: Zeile 6 des letzten Absatzes muß lauten:
Es ist nicht so, daß die Potentialfunktion
entlang der Meßgeraden unabhängig von der
Maschenweite ist, ...

Seite 42: vorletzte Zeile muß lauten:
Wir müßten deshalb eigentlich für jede Schicht-
kombination eine andere Korrektionsfunktion
ansetzen.

Seite 43: 5. Zeile muß lauten:
Damit werden dann auch die entsprechenden
Abweichungen von den Sollwerten H_1 und H_2
behandelt und bekannt.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein Widerstandsnetzwerk beschrieben, das geeignet ist, das elektrische Verhalten des Erdbodens analog darzustellen.

Eingangs wird gezeigt, daß bei einer Vierpunkt-Anordnung nach Schlumberger, bei der zwei Quellpunkte und zwei Aufpunkte auf einer gemeinsamen Geraden angeordnet sind, sich die Potentialdifferenz zwischen den beiden Aufpunkten - als Funktion einer idealen Zwei- bzw. Dreischichtstruktur des Erdbodens, als Funktion der Quellpunkt-Aufpunkt-Entfernungen und als Funktion der über die Quellpunkte abfließenden Stromstärke - durch die Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung angeben läßt.

Die weiteren Betrachtungen zeigen, daß diese Ableitungen für die Potentialdifferenz zwischen zwei Aufpunkten bei entsprechender Quellpunktanordnung auch für ein analog aufgebautes Widerstandsnetzwerk gelten. Damit können einfache Potentialdifferenzkurven sowohl durch die Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung wie auch durch Messungen am analog aufgebauten Widerstandsnetzwerk gewonnen werden. Beide Kurven stimmen mit ausreichender Genauigkeit überein. Die Potentialdifferenzkurven werden im Verlauf der Ausführungen etwas umgeformt und als Widerstandskurven bezeichnet. Diese Kurven, die sich für komplizierte Schichtverteilungen mathematisch nur sehr mühsam ausrechnen lassen, können somit wesentlich einfacher über Messungen am Widerstandsnetzwerk aufgezeichnet werden.

Im Anschluß daran werden verschiedene Störungen in die analog aufgebaute Schichtstruktur des Widerstandsnetzwerkes eingebaut. Die Störungen sind so dargestellt, wie sie auch in einer natürlichen Schichtverteilung vorkommen können. Anhand einiger Beispiele werden die Folgerungen für die praktische Anwendung dieser Netzwerkmeßkurven diskutiert.

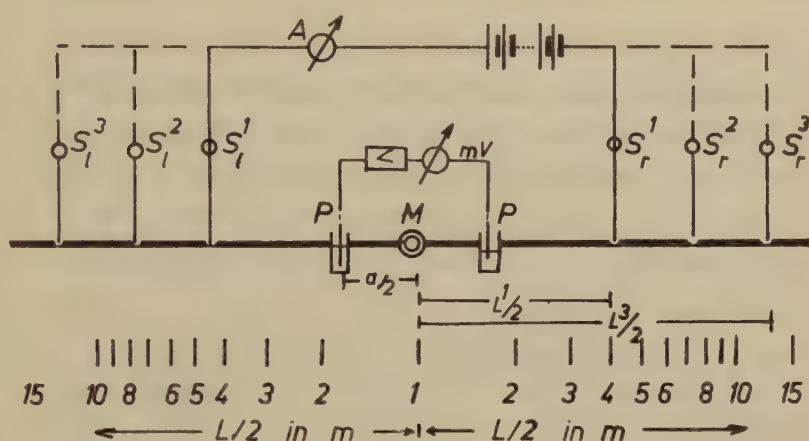
Im Anhang werden, soweit das nicht schon im Hauptteil geschehen ist, die auftretenden Fehler einer kritischen Betrachtung untersucht.

In der Geophysik werden wir oft vor das Problem gestellt, Aussagen über die verschiedenen Eigenschaften des Erdbodens in unterschiedlichen Tiefen machen zu müssen. Dafür stehen uns lediglich die Meßergebnisse zur Verfügung, die mit geeignet gewählten Verfahren an der Erdoberfläche gemacht worden sind. Diese geophysikalischen Prospektionsmethoden sind entsprechend den differenzierten Aufgabenstellungen recht zahlreich. Die folgenden Überlegungen und Untersuchungen werden für ein geoelektrisches Vierpunktverfahren durchgeführt. Gemeint ist hier ein Verfahren, daß zuerst von F. Wenner 1917 in Scientific Papers of the Bureau of Standards veröffentlicht wurde und später von den Brüdern Schlumberger modifiziert worden ist. Dieses Verfahren, das zum schnelleren Verständnis des folgenden hier kurz noch einmal beschrieben wird, bezeichnet man allgemein als Schlumberger-Methode. Selbstverständlich lassen sich die in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse auf jedes der Vierpunktverfahren ohne größere Schwierigkeiten ausdehnen. Die Vierpunktverfahren werden auch als Widerstandsverfahren bezeichnet, und zwar deshalb,

weil hiermit die spezifischen Widerstände als die die einzelnen Schichten charakterisierenden Größen gemessen werden.

Beim Schlumberger-Verfahren werden insgesamt vier Elektroden, zwei Stromelektroden S_l und S_r und zwei unpolarisierbare Potentialsonden P entlang einer Geraden im Gelände aufgestellt, und zwar symmetrisch zum gewählten Meßpunkt M, der somit zum geometrischen Mittelpunkt der Anordnung ausgezeichnet wird. Wir bezeichnen mit S_l und S_r die Stromelektroden, die links bzw. rechts vom Mittelpunkt stehen. Der Mittelpunktsabstand der Elektroden wird allgemein mit $L/2$ gekennzeichnet und muß stets für beide Elektroden gleich groß sein: $S_l^n = S_r^n = L^n/2$. n ist dabei eine Laufnummer ($n = 1, 2, 3 \dots$), die den gleichen Mittelpunktsabstand leichter kenntlich machen soll. Die Laufnummer n ist davon abhängig, ob die Messung grob unterteilt ist oder fein, und ob die Messung Aufschluß über oberflächennahe oder tiefer gelegene Schichten geben soll. Für unsere Überlegungen im Inneren der Abhandlung endet die Laufnummer n mit 11, ohne daß darauf noch einmal speziell hingewiesen wird.

Die Potentialsonden werden in geringer Entfernung, in etwa jeweils 0.5 m vom Mittelpunkt M aufgestellt (Abb. 1) und bleiben im allgemeinen während der ganzen Messung dort stehen. Ihr Abstand vom Mittelpunkt M wird mit $a/2$ bezeichnet.

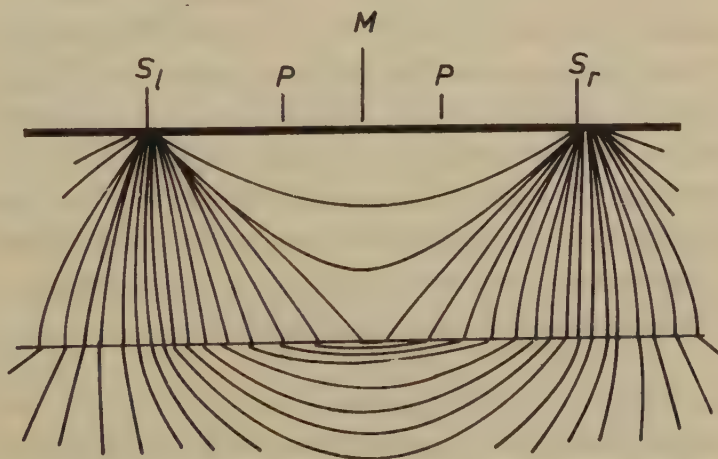


M = Mittelpunkt Meßpunkt

P = Potentialsonde

$S_{l,r}$ = linke, rechte Stromelektroden

Abb. 1



Schemo einer Schlumberger-Anordnung Abb. 2

Die Stromelektroden, zunächst bei dreimal $a/2$ gesteckt, wandern sukzessiv mit jeweils gleichem Mittelpunktsabstand $L/2$ auf der obenerwähnten Geraden vom Mittelpunkt weg. Bei jedem $L^n/2$ wird der über die Stromelektroden in den Erdboden abfließende Strom gemessen, und die dazugehörige Potentialdifferenz an den Potentialsonden abgelesen. Demnach gehören zu einer Meßkurve in unserem Fall jeweils 11 Stromstärkewerte und 11 Potentialdifferenzwerte. Die Schrittweite variiert also ständig und wird hauptsächlich durch den Maßstab bestimmt, in dem die Meßkurven gezeichnet werden. Im allgemeinen benutzt man hierzu Doppel-Logarithmenpapier. Speziell für unsere Versuche sind für $L^n/2$ folgende Werte angenommen worden: 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60 und 100 m.

Die für uns wichtige Größe einer solchen Messung ist der absolute Betrag des Potentialabfalls an der Erdoberfläche längs der endlichen Strecke zwischen den Potentialsonden. Diese Potentialdifferenz wird weitgehend durch Schichten und Körper mit unterschiedlichen spezifischen Widerständen beeinflusst, die uns dadurch bekannt werden. Hierzu gehört die Abbildung 2, die den Stromlinienverlauf in einer Zweischichtstruktur schematisch zeigt.¹¹⁾

Nun fragt es sich aber, wie man derartige Meßkurven, wie sie auch später noch zu sehen sein werden, lesen soll. Hierzu gab man sich bestimmte Schichtverteilungen mit den entsprechenden spezifischen Widerständen vor und

berechnete daraus den Potentialverlauf zwischen den Sonden. Diese so errechneten Kurven werden mit den Meßkurven verglichen. Im Fall einer Übereinstimmung sagt man, daß die beiden Schichtverteilungen, die vorgegebene und die im Gelände gemessene, sich gleichen und kennt damit die Struktur unter dem gewählten Meßpunkt.

Mittels der Bildquellenmethode berechnete J.N. Hummel 1929 einen Katalog von Zweischichtkurven¹⁾, der dann Jahre später von den Brüdern Schlumberger durch einige Dreischichtkurven ergänzt worden ist.

Heute stehen dem Geophysiker schon eine ganze Reihe solcher Kurvensätze zur Verfügung.

Im folgenden werden einige kurze Hinweise zur Berechnung der Auswertkurven nach Hummel und nach Stefanescu und Schlumberger gegeben, und es werden Schwierigkeiten aufgezeigt und diskutiert, die sich bei der Auswertung der verschiedenen Lösungen ergeben.

All diesen Berechnungen liegt ein Idealerdboden zu Grunde: Die Oberfläche muß horizontal und eben sein, die Schichten liegen dazu planparallel, sind homogen und isotrop und liegen auf einem idealen Substratum, das unendlich tief reicht.

Bei Hummel wird die erste Schicht mit dem spezifischen Widerstand ϱ nach oben von der Atmosphäre mit dem spezifischen Widerstand ϱ'' und nach unten vom Substratum

mit dem spezifischen Widerstand ϱ' begrenzt. Die Trennungsebenen dieser drei in sich homogenen und isotropen Schichten unterschiedlicher Leitfähigkeit seien parallel. Die horizontale Ausdehnung reiche ins Unendliche.

Bringen wir nun in die mittlere Schicht einen kugelförmigen Quellpunkt, der einen Abstand d von der Erdoberfläche habe, hinein und fragen, welche Potentialverteilung sich in den drei Schichten einstellen wird. Die Potentialfunktion f muß an den Grenzflächen die Bedingungen erfüllen:

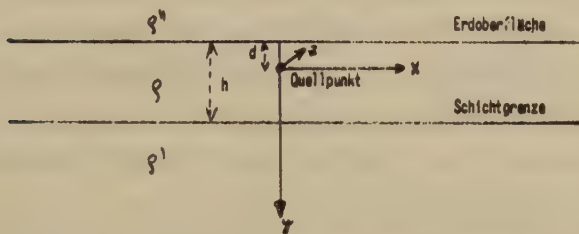
$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial n} = \epsilon'' \frac{\partial f''}{\partial n} \quad \text{und} \quad f = f'' \quad (1)$$

$$\epsilon \frac{\partial f}{\partial n} = \epsilon' \frac{\partial f'}{\partial n} \quad \text{und} \quad f = f' \quad (2)$$

Dies ist nur möglich, wenn jede der beiden Ebenen hinsichtlich der Lage des Quellpunktes Symmetrieebene ist. Beim Vorhandensein einer Trennungsebene erreicht man das bekanntlich dadurch, daß man die wirkliche Quelle an dieser Ebene spiegelt und so rechnet, als würde die gespiegelte Quelle real sein. Sind aber zwei Trennungsebenen vorhanden, so kommt man nur dann zum Ziel, wenn die wirklichen Quellen und ihre ersten Spiegelbilder immer wieder ungezählte Male an beiden Ebenen gespiegelt werden. Für das Potential f erhält man demnach Ausdrücke der Form:

$$f = \frac{1}{4\pi} \varrho \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_m} \right) \quad (3)$$

(m ist dabei der Spiegelungsindex, r_m der Abstand der gespiegelten Punkte vom Aufpunkt und $I_m/4\pi$ ist die Ergiebigkeit der fiktiven Quellen; mit I bezeichnen wir die Stromstärke)



Bei dieser Ableitung ist berücksichtigt, daß der Quellpunkt die Form einer kleinen Kugel hat, aus dem die Stromdichte j quillt:

$$j = \frac{I}{4\pi r^2} \quad (4)$$

Die Feldstärke $\mathcal{E}$ in einem Aufpunkt ist nach dem Ohm'schen Gesetz für das Strömungsfeld:

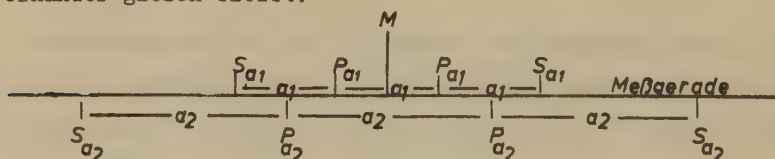
$$\mathcal{E} = j \epsilon \quad (5)$$

Daraus ergibt sich für das Potential φ durch Integration

$$\varphi = \int |\mathcal{E}| dr = \frac{I}{4\pi r} \epsilon \quad (6)$$

Die Gleichung (3) schließlich bekommen wir durch Summation

über alle fiktiven Quellpunkte. Im weiteren Verlauf der Rechnung wird diese Gleichung (3) so umgeformt, daß der Quellpunkt, der ja noch eine beliebige Lage innerhalb der ersten Schicht hat, in die Grenzschrift an der Erdoberfläche unmittelbar unter der Meßgeraden zu liegen kommt. Der Ausdruck für $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ vereinfacht sich zu $r = x$, wenn wir mit x die Richtung der Meßgeraden bezeichnen. Um die weitere Rechnung in einfachster Form durchzuführen, geben wir die Potentialdifferenz für eine Wenner-Anordnung an. Der Unterschied dieser Anordnung zur Schlumberger-Anordnung besteht darin, daß bei Wenner sowohl die Elektroden als auch die Potentialsonden wandern, und zwar in der Weise, daß das Abstandsverhältnis der einzelnen Elektroden untereinander gleich bleibt:



Der Abstand der Quellpunkte auf der Meßgeraden beträgt demnach $L = 3a$. Die Potentialdifferenz zwischen den Sonden für eine Wenner-Anordnung ist nach Hummel:

$$\Delta f = \frac{I}{2\pi a} \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n \left[\frac{1}{\sqrt{1 + (2n\frac{h}{a})^2}} - \frac{1}{\sqrt{4 + (2n\frac{h}{a})^2}} \right] \right\} \quad (7)$$

(h ist die Mächtigkeit der ersten Schicht; k_1 ist für den Quotienten $\frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 + \rho}$ eingesetzt)

Ist die erste Schicht allein vorhanden, beginnt also die zweite Schicht erst im Unendlichen, so können wir den

spezifischen Widerstand dieser ersten Schicht durch die folgende Gleichung bestimmen:

$$\varrho = C \frac{\Delta f}{I} \quad (8)$$

Diese Gleichung folgt aus (7), wenn wir den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta f$ bilden.

Bemerkung:

Zur Ableitung der Konstanten C gehen wir von der Vorstellung aus, daß sich mitten in einem beliebig großen Raum konstanter isotroper Leitfähigkeit σ zwei kleine kugelförmige Quellpunkte im Abstand L befinden, aus denen eine Stromdichte $j = \pm \frac{I}{4\pi r^2}$ hervorquillt. Das Produkt dieser beiden Werte $\phi = \frac{1}{\varrho}$ und j geben uns in jedem Punkt des Raumes die Feldstärke $\mathcal{E}$ an: $\mathcal{E} = j \cdot \varrho$ (5). Daraus wiederum ergibt sich das Potential an den Sonden einer Schlumberger-Anordnung zu:

$$f_{(L/2-a/2)} = \frac{I\varrho}{4\pi} \int_{r_0}^{(L/2 - a/2)} \frac{dr}{r^2} = \frac{I\varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{L/2-a/2} \right)$$

und

$$f_{(L/2+a/2)} = \frac{I\varrho}{4\pi} \int_{r_0}^{(L/2 + a/2)} \frac{dr}{r^2} = \frac{I\varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{L/2+a/2} \right)$$

(r_0 ist Radius der Kugelquelle). Die Differenz dieser beiden Werte ist Δf .

$$\Delta f = \frac{I\varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{L/2 - a/2} - \frac{1}{L/2 + a/2} \right)$$

Der gleiche Wert kommt von der negativen Quelle hinzu, so daß die gesamte Spannung zwischen den beiden Punkten

$$\Delta f = 2 \frac{I\varrho}{4\pi} \left(\frac{a}{(L/2)^2 - (a/2)^2} \right) \quad \text{ist.}$$

Da die Messungen mit den verschiedenen Elektrodenanordnungen an der Erdoberfläche durchgeführt werden, ist diese Gleichung für Δf für den Halbraum anzuwenden. Der Wert Δf verdoppelt sich dadurch und für eine Spannung zwischen den Elektroden gilt dann:

$$\Delta f = \frac{I \varrho}{C^x} \quad \text{wobei } C^x = \frac{\pi}{a} \left\{ (L/2)^2 - (a/2)^2 \right\}$$

Bei einer Wenner-Anordnung gelten natürlich unter den gleichen Voraussetzungen die entsprechenden Gleichungen:

$$f_a = \frac{I \varrho}{4\pi} \int_{r_0}^a \frac{dr}{r^2} = \frac{I \varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{a} \right)$$

$$f_{2a} = \frac{I \varrho}{4\pi} \int_{r_0}^{2a} \frac{dr}{r^2} = \frac{I \varrho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2a} \right)$$

Durch Differenzbildung bekommen wir wieder den Wert für Δf . Berücksichtigen wir, daß es sich um ein Dipolfeld handelt und daß die Messungen an der Erdoberfläche durchgeführt werden, so bekommen wir:

$$\Delta f = \frac{I}{2\pi a} \varrho$$

Die Konstante C^x hat für die Wenner-Anordnung den Wert $C^x = 2\pi a$.

Der spezifische Widerstand ϱ wird nach Gleichung (8) einen konstanten Wert behalten, wenn die erste Schicht unendlich ausgedehnt ist, unabhängig davon, ob wir mit den Stromelektroden auf der Meßgeraden wandern und bei jeder neuen Elektrodenaufstellung die Spannung zwischen den Potentialsonden und den über die Elektroden abfließenden Strom messen. Ändert sich ϱ in Abhängigkeit von der Elektrodenstellung, so ist daraus zu schließen, daß der Untergrund nicht homogen ist, wie es

vorausgesetzt wurde. Der Wert für ϱ verliert damit seine Bedeutung als wohl definierter spezifischer Widerstand des Untergrundes. An seine Stelle tritt dafür eine Größe, die eine bisher noch unbekannte Funktion der wirklichen spezifischen Widerstände ist. Diese unbekannte Funktion, die jeweils einen mittleren Widerstandswert angibt, bezeichnen wir als scheinbaren spezifischen Widerstand des inhomogenen Untergrundes und definieren:

$$R_s = C \frac{A f}{I} \quad (9)$$

Es kommt nun darauf an, aus den Schwankungen, denen dieser Wert R_s von Messung zu Messung unterworfen ist, Rückschlüsse auf die Zusammensetzung des Erdbodens zu ziehen. Dies ist allgemein nicht möglich. Nur in einigen Sonderfällen kann R_s als Funktion der spezifischen Widerstände der einzelnen Schichten und deren Mächtigkeiten und als Funktion der Elektrodenanordnung angegeben werden. Ein solcher Sonderfall ist eine Zweischichtstruktur. Hierfür gilt die Gleichung (7), so daß für R_s gilt:

$$R_s = \varrho \left\{ 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n \left[\sqrt{\frac{1}{1 + (2n \frac{h}{a})^2}} - \sqrt{\frac{1}{4 + (2n \frac{h}{a})^2}} \right] \right\} \quad (10)$$

Bilden wir den Grenzwert von (10), $\lim_{h \rightarrow \infty} R_s$, lassen wir die erste Schicht über alle Schranken wachsen, so bekommen wir wieder den wohl definierten spezifischen Widerstand ϱ .

Die folgende Abbildung 4a zeigt einige nach Gleichung (10) berechnete Kurven. Der Kurvenparameter hierbei ist k_1 .

Abb. 4a

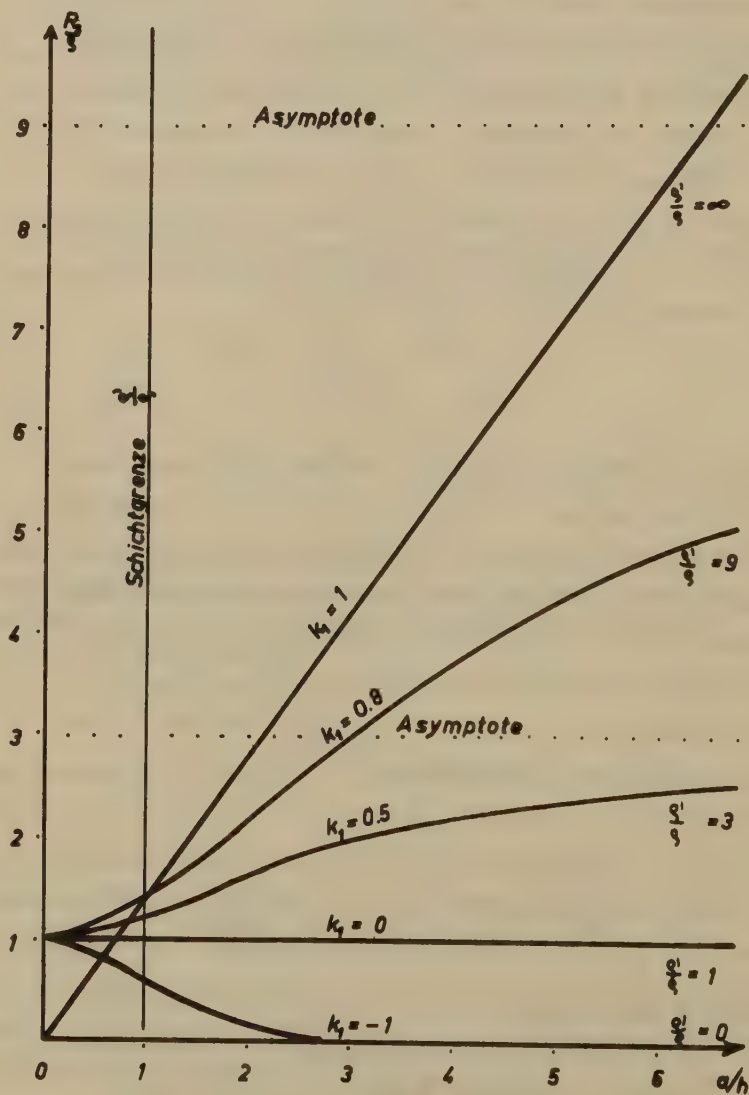
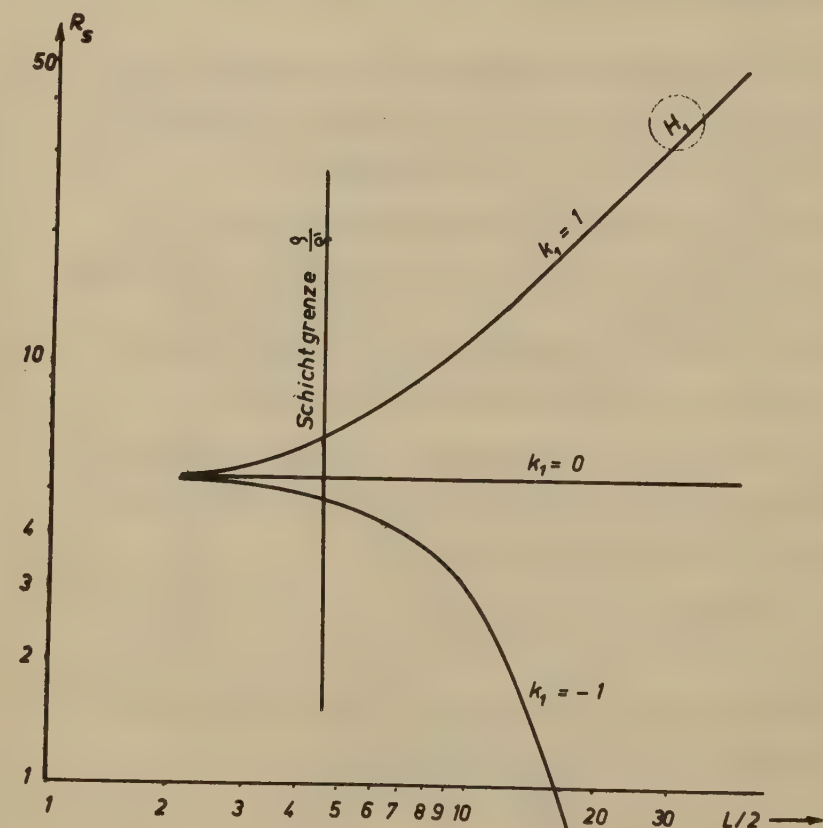


Abb. 4b zeigt Auswertkurven, die Hummel 1929 nach Gleichung (10) für eine Wenner-Anordnung berechnete.

Es bedeutet: $k_1 = \frac{q_1 - q}{q_1 + q}$



$$R_s = \vartheta \left\{ 1 + 2 \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} k_1^n \left[\frac{1}{\left(\frac{L-a}{2}\right)^2 + (2nh)^2} - \frac{1}{\left(\frac{L+a}{2}\right)^2 + (2nh)^2} \right] \right\}$$

Abb. 4b zeigt die für eine Schlumber-Meßanordnung von Hummel umgerechneten Zweischichtkurven. Die Darstellung erfolgt auf Doppel-Logarithmenpapier. Diese Kurven gehen auch aus der von Stefanescu und Schlumberger auf Seite 13 skizzierten Rechnung als Grenzkurven hervor.

Es bedeuten: $k_1 = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta' + \vartheta}$

H_1 = Hummel-Zweischichtkurve für $\frac{\vartheta'}{\vartheta} = \infty$

H_2 = Hummel-Zweischichtkurve für $\frac{\vartheta'}{\vartheta} = 0$

Die Differentialgleichung (11) wird mit dem Ansatz:

$$f(r, z) = U(r) \cdot g(z) \quad (15)$$

$$g(z) = e^{\pm \lambda z} \quad (16)$$

gelöst. Wir bekommen damit eine Bessel'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda^2 U = 0 \quad (17)$$

wobei λ^2 zunächst eine beliebige Konstante ist.

Hierfür setzen wir als Lösungsansatz $I_0(\lambda r) e^{\pm \lambda z}$. (Dabei bedeutet $I_0(\lambda r)$ die Bessel-Funktion nullter Ordnung.) Nach einer längeren Zwischenrechnung bekommt man schließlich für das Potential in einem Punkt an der Erdoberfläche im Abstand r vom Quellpunkt:

$$f_1 = \frac{I}{2\pi} g_1 \left\{ \frac{1}{r} + 2 \cdot \int_0^\infty \theta(\lambda) I_0(\lambda r) d\lambda \right\} \quad (18)$$

mit

$$\theta(\lambda) = \frac{k_1 e^{-2\lambda h_1} + k_2 e^{-2\lambda h_2}}{1 - k_1 e^{-2\lambda h_1} - k_2 e^{-2\lambda h_2} + k_1 k_2 e^{-2\lambda d}} \quad (19)$$

und $k_1 = \frac{g_2 - g_1}{g_2 + g_1}$ und $k_2 = \frac{g_3 - g_2}{g_3 + g_2}$

Das Potential f besteht demnach aus zwei Anteilen. Der erste Teil entspricht dem Potential einer Stromelektrode

in einem homogen gedachten Medium mit dem spezifischen Widerstand ϱ_1 in der Entfernung r . Der andere Teil berücksichtigt die Existenz zweier weiterer Schichten mit den spezifischen Widerständen ϱ_2 und ϱ_3 .

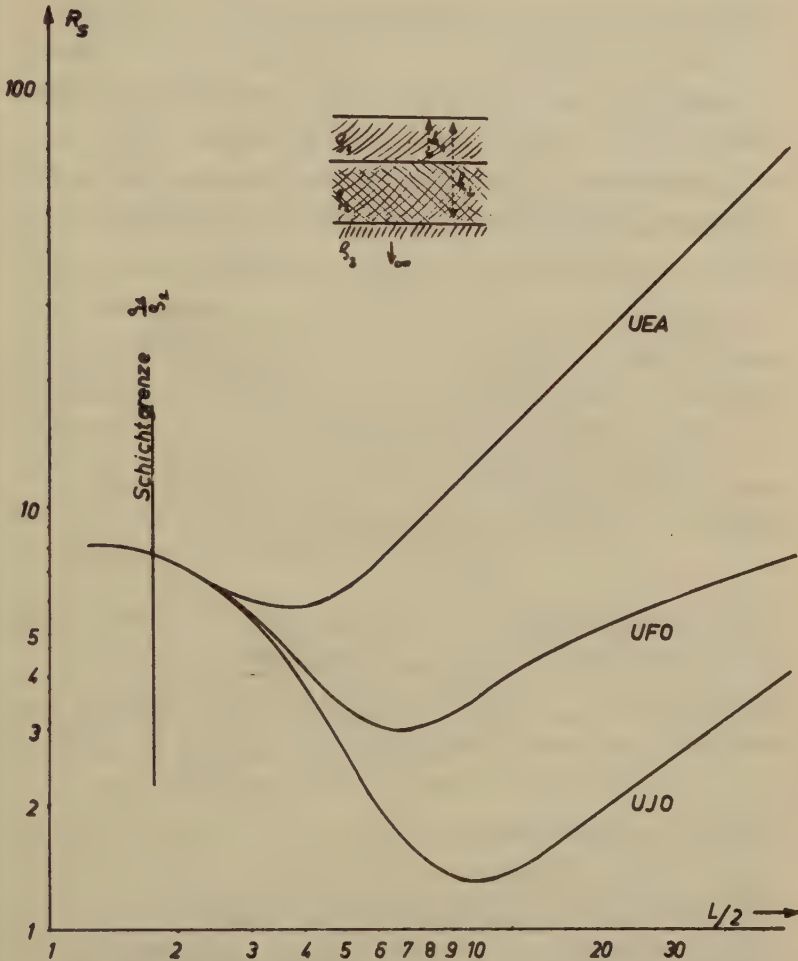
Nehmen wir im gleichen Medium einen zweiten Quellpunkt mit der umgekehrten Strömungsrichtung im Abstand L hinzu, so können wir auch für diesen Quellpunkt das Potential in einem Abstand R' feststellen:

$$f_2 = \frac{I}{2\pi} \varrho_1 \left\{ \frac{1}{R'} + 2 \int_0^\infty \varrho(\lambda) I_0(\lambda R') d\lambda \right\} \quad (20)$$

Insbesondere gilt das auch für die Punkte, an denen bei einer Schlumberger- oder Wenner-Anordnung die Potentiale gemessen werden. Über Potentialdifferenzbildungen können wir dann ebenfalls den scheinbaren spezifischen Widerstand R_s angeben:

$$R_s = \frac{C^*}{I} \Delta f \quad (9)$$

Um zu einer Auswertkurve zu kommen, muß R_s bei vorgegebenen spezifischen Widerständen $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, bei vorgegebenen Schichtmächtigkeiten h_1, h_2 und bei festem Potentialsondenabstand $a/2$ (Schlumberger-Methode) für jeden Wert $L/2$ berechnet werden. Kurven, die nach diesem Verfahren berechnet worden sind, zeigt die nächste Abbildung 5. Die Parameter dazu sind die verschiedenen spezifischen Widerstände und das Mächtigkeitsverhältnis der ersten zur zweiten Schicht. Die Angabe der Parameter erfolgt dabei in



Dreischichtkurven für eine Schlumberger-Meßanordnung, die nach der auf Seite 13 angegebenen Methode berechnet worden sind. Es bedeuten:

$$\text{UEA} : \frac{h_2 - h_1}{h_1} = 1/2; \rho_2 = 1/9 \rho_1; \rho_3 = \infty$$

$$\text{UFO} : \quad \quad \quad = 1; \rho_2 = 1/9 \rho_1; \rho_3 = \rho_1$$

abgekürzter Schreibweise, z.B. (UEA) (Katalognummer)

Fassen wir hierzu kurz zusammen: Die Anwendung geoelektrischer Widerstandssondierungen für eine genaue Kartierung geologischer Strukturen beruht auf der Kenntnis der jeweiligen Potentialfunktion des geschichteten Erdbodens. Diese Potentialfunktion eines künstlich angelegten Feldes, die durch bekannte mathematische Beziehungen (9) den scheinbaren spezifischen Widerstand der Schichtfolgen mit den wirklichen spezifischen Widerständen der einzelnen Schichten verbindet, ist aufs engste mit der Laplace'schen Differentialgleichung verknüpft. Es ist deshalb wichtig, eine Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0 \quad (21)$$

für verschiedene geschichtete Erdböden zu kennen. Die bisher bekannten Lösungen haben wir bereits diskutiert, sie beschränken sich alle auf relativ einfache geologische Strukturen, bei denen der Boden planparallel geschichtet ist, und die Leitfähigkeiten innerhalb der einzelnen Schichten konstant bleiben.

Es gibt bisher noch keine Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung (11) bzw. (21), die die unterschiedlichen Neigungen der einzelnen Schichten zueinander und eine inhomogene Verteilung der Leitfähigkeiten innerhalb der einzelnen Schichten berücksichtigt. Deshalb wird die Auswertung von Widerstandssondierungen wesentlich schwieriger, wenn die Bodenverhältnisse von den oben

angeführten Idealbedingungen abweichen. Hier ist die Auswertung, sofern sie überhaupt durchgeführt wird, zwangsläufig ungenau und hat mehr den Charakter einer Abschätzung.

Man bemüht sich in letzter Zeit, auch für schwerer zu berechnende Strukturen Auswertkurven zu bekommen. Die Entwicklung elektronischer Großrechenanlagen hat dies zu einem Teil ermöglicht.

Andererseits bemüht man sich, rechnerisch sehr schwer zu erfassende Strukturen durch Modelle nachzubilden. Man baut die gewünschten Schichtungen aus verschiedenen Erden in einem Sandkasten nach und wendet darauf die oben beschriebenen Vierpunktverfahren an.

Auch mit Hilfe des elektrolytischen Troges versucht man, mit teilweise sehr großem Aufwand, Näherungskurven für einige Spezialfälle zu bekommen.²⁾ Doch beide Modelle sind nicht allgemein genug verwendbar.

In dieser Arbeit wird von einem Versuch berichtet werden, Lösungen für die Laplace'sche Differentialgleichung des geschichteten Untergrundes mittels eines analog aufgebauten Widerstandsnetzwerkes, das auf Abbildung 6 zu sehen ist, anzugeben. Ähnliche Versuche auf anderen Gebieten sind bereits mit guten Erfolgen durchgeführt worden.

Analog bedeutet in diesem Zusammenhang, daß zwei verschiedene physikalische Systeme durch die gleichen mathematischen

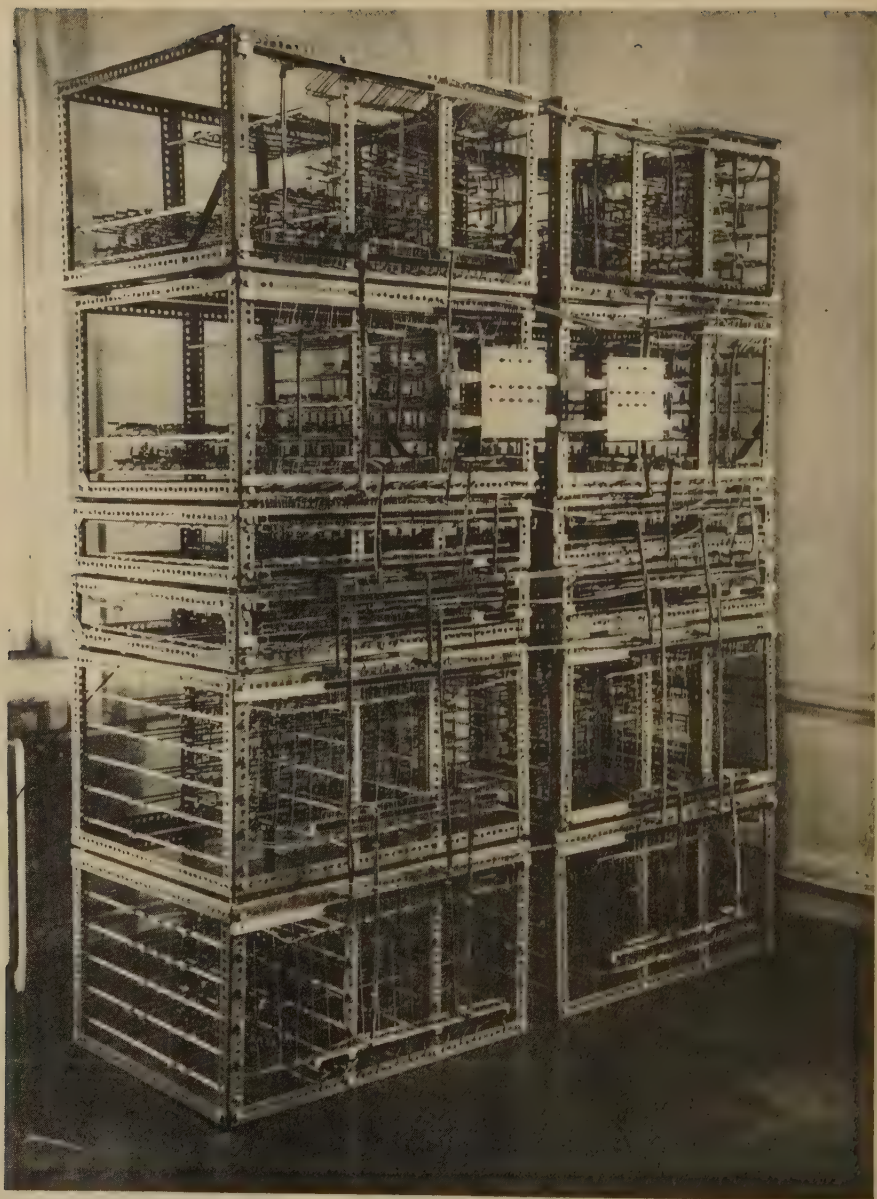


Abb. 6 zeigt eine Gesamtansicht des Netzwerkes

Beziehungen verknüpft sind. Man spricht dann von einem elektrischen Analogrechner, wenn man zur Lösung der gewünschten Differentialgleichung ein analoges physikalisches System aufbaut und durch ein physikalisches Experiment zur Lösung dieser gegebenen Differentialgleichung kommt.³⁾

Für unsere speziellen Betrachtungen sei das eine System der reale Erdboden, das andere das konstruierte Widerstandsnetzwerk. In diesen beiden Systemen wird der Aufbau eines natürlich oder auch künstlich erregten Potentialfeldes durch die Laplace'sche Differentialgleichung beschrieben.

Wir werden deshalb zunächst untersuchen müssen, ob es überhaupt möglich ist, eine Lösung der Laplace'schen Differentialgleichung durch ein Widerstandsnetzwerk zu finden. Aus diesem Grunde betrachten wir noch einmal die partielle Differentialgleichung

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f = 0 \quad (21)$$

oder (in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad (22)$$

Gesucht wird also eine Funktion f , die der Laplace'schen Differentialgleichung und den noch anzugebenden speziellen Randbedingungen genügt.

Zunächst versuchen wir, eine Lösung der Gleichung (22) an diskret vorgegebenen Punkten eines noch zu konstruierenden Raumes anzugeben. Für eine erste allgemeine Beschreibung sei der quaderförmige Raum (Abb. 7a) mit einem Material, dessen spezifischer Widerstand bekannt ist, homogen ausgefüllt. In diesen Raum projizieren wir ein Gitter hinein, das einen konstanten Gitterabstand h in allen drei Richtungen x , y und z besitzt. Die einzelnen Gitterknotenpunkte werden mit P_{mno} bezeichnet.

$$\begin{aligned}x &= 1, 2, 3 \dots m \dots A + 1 \\y &= 1, 2, 3 \dots n \dots B + 1 \\z &= 1, 2, 3 \dots o \dots C + 1\end{aligned}$$

(A , B und C = Anzahl der Widerstände in den drei verschiedenen Richtungen, siehe Abbildung 7d)

Wir greifen einen beliebigen Punkt P_{mno} mit den dazugehörigen Verbindungen zu den Nachbarpunkten aus dem Netz heraus und bezeichnen diesen nun speziellen Punkt als Nullpunkt des so entstandenen Sternes. (Abb. 7b) Dabei lassen wir der Einfachheit halber die Koordinatenangaben m , n und o dieses Punktes und die seiner Nachbarpunkte weg. Die Nachbarpunkte bekommen dafür neue Bezeichnungen P , Q , R , S , T und U . (Abb. 7c) Der Abstand der einzelnen Punkte vom Mittelpunkt des Sternes, vom Nullpunkt, betrage jeweils h .

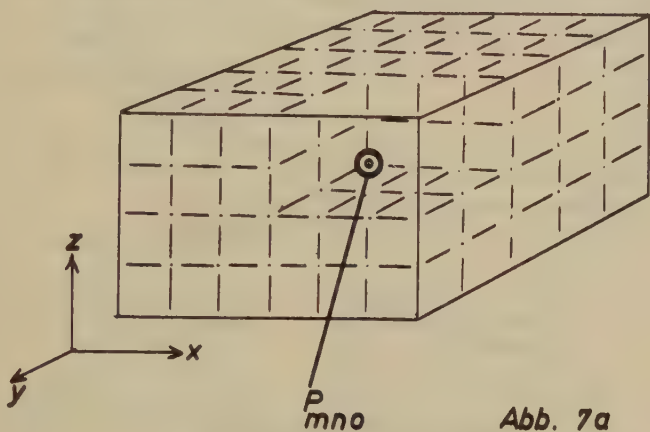


Abb. 7a

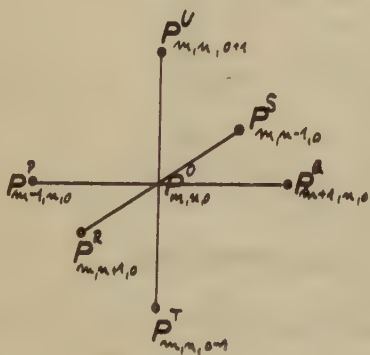


Abb. 7b

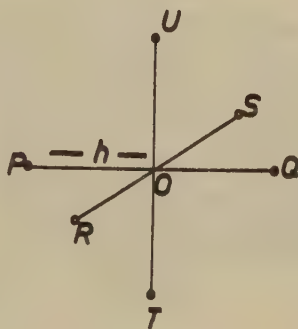
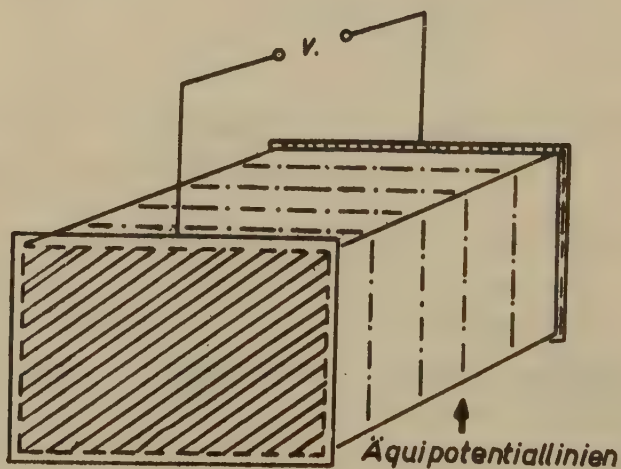
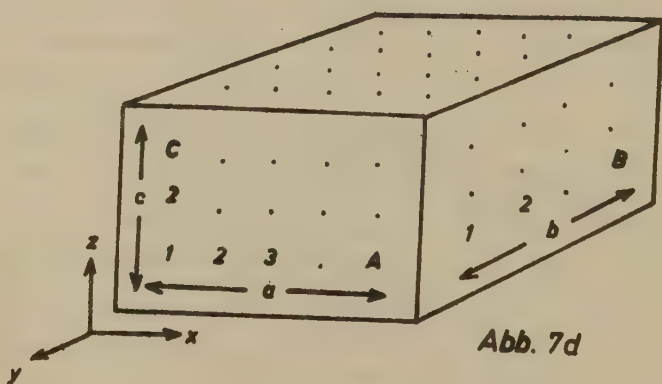


Abb. 7c

Schemaskizze des gitterförmigen Netzwerkaufbaues



Die Potentialwerte f in den sechs Punkten P bis U werden in einer Taylor-Reihe entwickelt, unter der Voraussetzung, daß das Potential f_0 im Punkt O bekannt ist. Da uns mindestens der Potentialwert am Stromzuführungspunkt bekannt ist, können wir unseren Stern so wählen, daß diese Bedingung erfüllt ist.

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h, y_0, z_0) &= f_Q(h, y_0, z_0) = \\
 f(x_0, y_0, z_0) &+ h \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} + \\
 \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2} &+ \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^3} + \\
 \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^4} &+ \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_Q &= f_0 + h \frac{\partial f}{\partial x} /_0 + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_0 + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} /_0 + \\
 &\frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} /_0 + \dots \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_P &= f_0 - h \frac{\partial f}{\partial x} /_0 + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_0 - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} /_0 + \\
 &\frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} /_0 - + - \dots \quad (25)
 \end{aligned}$$

Als Summe von (24) und (25) erhalten wir

$$f_Q + f_P = 2f_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_0 + \frac{h^4}{4!} \cdot 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} /_0 + \dots \quad (26)$$

Entsprechend kommen wir zu den folgenden Formeln:

$$f_R = f_0 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} /_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} /_0 + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} /_0 + \\ \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} /_0 + \dots \quad (27)$$

$$f_S = f_0 - h \cdot \frac{\partial f}{\partial y} /_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} /_0 - \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} /_0 + \\ \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} /_0 - + - \dots \quad (28)$$

$$f_R + f_S = 2f_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} /_0 + \frac{h^4}{4!} \cdot 2 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} /_0 + \dots \quad (29)$$

und

$$f_U = f_0 + h \cdot \frac{\partial f}{\partial z} /_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} /_0 + \frac{h^3}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} /_0 + \\ \frac{h^4}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} /_0 + \dots \quad (30)$$

$$f_T = f_0 - h \frac{\partial f}{\partial z} /_0 + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} /_0 - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} /_0 +$$

$$\frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} /_0 - + - \dots \quad (31)$$

$$f_U + f_T = 2f_0 + \frac{h^2}{2!} \cdot 2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} /_0 + \frac{h^4}{4!} \cdot 2 \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} /_0 + \dots \quad (32)$$

Aus den Formeln (26), (29) und (32) isolieren wir die zweiten partiellen Differentialquotienten.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_0 = \frac{1}{h^2} (f_P + f_Q - 2f_0 - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} /_0) + \dots \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} /_0 = \frac{1}{h^2} (f_R + f_S - 2f_0 - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} /_0) + \dots \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} /_0 = \frac{1}{h^2} (f_U + f_T - 2f_0 - \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} /_0) + \dots \quad (35)$$

Addieren wir die Ausdrücke (33), (34) und (35), so bekommen wir, vorausgesetzt, daß die Schrittweite h entsprechend klein ist und deshalb alle Glieder mit Potenzen von h^5 an aufwärts vernachlässigt werden können:

$$\Delta f_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} /_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} /_0 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} /_0 =$$

$$\frac{1}{h^2} (f_P + f_Q + f_R + f_S + f_T + f_U - 6f_0) -$$

$$\frac{1}{h^2} \frac{h^4}{12} \cdot \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} /_0 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} /_0 + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} /_0 \right) \quad (36)$$

Wir haben nun eine Differenzengleichung für die Potentialfunktion f bekommen.

$$\Delta f_0 = Df_0 - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \Big|_0 + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \Big|_0 + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \Big|_0 \right) \quad (37)$$

An dieser Stelle haben wir einen Differenzenoperator D eingeführt. Die mit D symbolisierte Operation enthält laut Definitionsgleichung (38) die Bestimmung der Differenzen $f_P - f_0$ usw.

$$Df_0 = \frac{1}{h^2} (f_P + f_Q + f_R + f_S + f_T + f_U - 6f_0) \quad (38)$$

Mit dieser Differenzengleichung Df_0 gleich 0 nähern wir die Laplace'sche Differentialgleichung an. Der Fehler, den wir dabei begehen, wird durch die Glieder vierter Ordnung abgeschätzt:

$$\Delta f - Df_0 = - \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} \right) \pm \dots \quad (39)$$

Diese Differenz kann mit kleiner werdendem h beliebig klein gemacht werden. Damit paßt sich die Näherungslösung immer mehr der richtigen Lösung an.

Wir haben erreicht, daß der Differentialquotient $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_0$ durch die Differenzen der Potentiale in den Punkten O , P und Q ersetzt werden kann, zuzüglich einiger mit abnehmendem h kleiner werdender Glieder (33).

Dies ermöglicht uns, die Potentialverteilung an vorgegebenen Punkten eines gitterförmig aufgeteilten Raumes anzugeben, wenn der Gitterabstand so gewählt ist, daß mindestens alle Glieder, die h^5 und höhere Potenzen von h enthalten, vernachlässigt werden können. Jeder Gitterpunkt heiße auch Knotenpunkt oder Netzkpunkt.

Für die Verwendung eines Widerstandsnetzwerkes, das wir zur Lösung dieses Problems gebrauchen, stützen wir uns auf den folgenden Satz aus der Differenzenrechnung: Wird jedem Knotenpunkt des Netzes ein Potentialwert f zugeordnet, und zwar so, daß zwischen dem f in einem vorgegebenen Punkt O und den f -Werten der unmittelbar benachbarten Punkte P, Q, R, S, T und U die Beziehung besteht, daß (38)

$$Df_0 = 0$$

gilt, und an den Grenzflächen die Randbedingungen erfüllt sind, so wird der Unterschied zwischen den gesuchten Potentialwerten, die die Laplace'sche Differentialgleichung (21) erfüllen und den Werten, die der Gleichung (38) genügen, sich mehr und mehr Null nähern, je kleiner die Maschenweite h wird. Dieser Beweis wurde von S. Gerschgorin geliefert.⁵⁾

Wir sind bei dieser eben durchgeführten Ableitung der Differenzengleichung für die Potentialfunktion f von

der Laplace schen Differentialgleichung dieser Funktion f ausgegangen und haben dazu auf Seite 17 den Raum, in dem diese Gleichungen gelten sollen, gitterförmig aufgeteilt. (Abb. 4a)

Dieses Gitter bleibt auch im folgenden bestehen, nur wird das Material, das bisher nicht näher definiert worden ist, zu technischen Widerständen zusammengefaßt. Die Werte dieser Widerstände werden auf Seite 31 angegeben, wenn der spezielle Raum, für den dieses Widerstandsnetzwerk gebaut worden ist, definiert wird.

Damit können wir zu einer allgemeinen Beschreibung des Netzwerkes übergehen.

In jedem Punkt P_{mno} des Gitters kommen allgemein sechs Widerstände zusammen. Ausgenommen davon sind natürlich die Randpunkte. Für alle diese Knotenpunkte wird die Gültigkeit des Kirchhoff schen Gesetzes

$$\sum_{k=1}^6 I_k = 0 \quad (40)$$

vorausgesetzt, das heißt, daß jetzt gilt:

$$\frac{f_P - f_0}{R_P} + \frac{f_Q - f_0}{R_Q} + \frac{f_R - f_0}{R_R} + \frac{f_S - f_0}{R_S} + \frac{f_T - f_0}{R_T} + \frac{f_U - f_0}{R_U} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{V_P}{R_P} + \frac{V_Q}{R_Q} + \frac{V_R}{R_R} + \frac{V_S}{R_S} + \frac{V_T}{R_T} + \frac{V_U}{R_U} = 0 \quad (42)$$

Vergleichen wir die Gleichungen (38) und (42), so sehen wir, daß wir eine vollständige formale Analogie zwischen der Spannung V , die an den Knotenpunkten des Widerstandsnetzwerkes erscheint, und der gesuchten Funktion f haben, wenn wir die Widerstandswerte R_P bis R_U gemäß der Beziehung (43) für den dreidimensionalen Fall wählen:

$$R_P = R_Q = R_R = R_S = R_T = R_U = h^2 H_0 \quad (43)$$

Die Größe H_0 hat dabei die Dimension eines Widerstandes pro Flächenheit.

Die Bedingungen an den einzelnen Grenzflächen lauten:

$$j_{n1} = j_{n2} \quad \text{und} \quad f_1 = f_2 \quad (1)$$

bzw.

$$j_{n2} = j_{n3} \quad \text{und} \quad f_2 = f_3 \quad (2)$$

(j = Stromdichte)

Daraus läßt sich das eben besprochene Kirchhoff'sche Gesetz ableiten (40).

Wir fordern von einem Widerstandsnetzwerk, welches wir nach einem Vorschlag von D. Ernst⁶⁾ als Modellrechner bezeichnen, und das zu der Gruppe der kombinierten analogen Rechenhilfsmittel gehört, daß seine Ergebnisse sehr genau sind. Mindestens aber sollen die Ergebnisse die

in der Praxis verlangte Genauigkeit von $\pm 1\%$ haben. Eine Begrenzung der Genauigkeit ist einmal gegeben durch die elektrischen Bauelemente mit ihren Toleranzen, zum anderen durch die Maschenweite, den Abstand zwischen zwei Knotenpunkten.

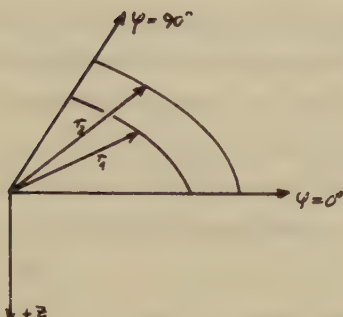
Die Fehler, die durch die Abweichungen vom Sollwert der Widerstände entstehen, sind im allgemeinen gering. Sie werden im Anhang erläutert.

Die Maschenweitenfehler werden bei der Besprechung der gemessenen Widerstandskurven aufgezeigt werden.

Damit kommen wir zu den Aufbauprinzipien des zu besprechenden Netzwerkes, das bereits auf Abbildung 6 zu sehen war.

Dieser Modellrechner ist nach den einschlägigen Literaturinformationen das erste wirklich dreidimensionale Netzwerk. Viele dreidimensionale Aufgaben lassen sich mit einem rotationsymmetrischen Netzwerk lösen. In diesem Fall ist das elektrische Feld nur eine Funktion des Radius r und der Zylinderkoordinate z . Man spart gewissermaßen eine Dimension ein und kommt deshalb effektiv mit einem zweidimensionalen Widerstandnetzwerk aus. Allerdings muß man bei diesem Netzwerk darauf achten, daß die Randbedingungen an der Zylinderachse stets erfüllt sind, denn es zeigt sich, daß der Widerstand R - in Zylinderkoordinaten dargestellt - sich wie folgt ergibt:

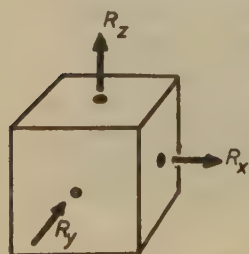
$$R_{\text{zyl}} = \frac{g}{\Delta z} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$



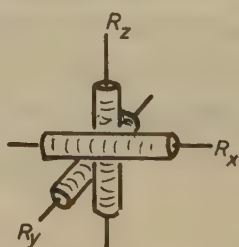
An der Zylinderachse wird $r_1 = 0$. Dadurch wird der obige Ausdruck für R_{zyl} unbestimmt. Uns interessieren aber hauptsächlich Messungen in der unmittelbaren Nähe des Mittelpunktes, der, in Zylinderkoordinaten ausgedrückt, mit der Rotationsachse zusammenfällt. Die damit verbundenen Schwierigkeiten zwingen uns dazu, ein wirklich dreidimensionales Netzwerk aufzubauen.

Im folgenden gilt es zu klären, wie der Erdboden aufgeteilt werden muß, und wie diese einzelnen Teile umgeformt werden müssen, damit schließlich ein analoges Widerstandsnetzwerk aufgebaut werden kann. Dazu geben wir uns zunächst einen geschichteten Erdboden vor, so wie er für die Berechnung der Auswertkurven vorausgesetzt werden muß. Er sei horizontal und planparallel geschichtet, homogen und isotrop. Die Schichten erstrecken sich, soweit sie nicht durch besondere Mächtigkeitsforderungen festgelegt sind, horizontal und vertikal ins Unendliche. Aus diesem

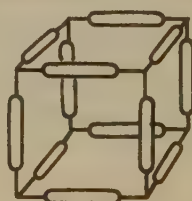
Erdboden schneiden wir ein kleines Volumenelement heraus, beispielsweise einen Kubikmeter. Wir legen nun in x-Richtung eine Spannung an den betreffenden Flächen an und messen den Widerstand in dieser Richtung. Nach den Voraussetzungen ist dieser gleich den Widerständen, die natürlich auf dieselbe Art gemessen werden, in der y- und z-Richtung. Für den elektrischen Strom ist der Widerstandswert entscheidend, unabhängig davon, ob der mit diesem Wert behaftete Widerstand nun aus Erde oder aus Draht besteht. Deshalb können wir für diesen Kubikmeter Idealerde ohne weiteres drei serienmäßig hergestellte Widerstände in den drei entsprechenden Koordinatenrichtungen verwenden. Diese drei Widerstände können wir wiederum durch zwölf geeignet ausgewählte und geschaltete Widerstände ersetzen, ohne daß wir dadurch gegen die Gesetze der Stromverzweigungen verstoßen. Damit gewinnen wir einen Widerstandswürfel, der dem Würfel Erdboden entspricht, der aber in seiner Größe um einige Zehnerpotenzen kleiner ist. Mit diesen Widerstandswürfeln, von denen jeder einzelne für sich ein selbständiges Bauelement ist, können alle gewünschten Schichtkombinationen zusammengesetzt werden. Diese Würfel sind die Grundlage des aufzubauenden Netzwerkes.



Erdwürfel



Widerstandswerte des Erdwürfels
in den drei Richtungen x, y und z



Analoge Darstellung des
Erdwürfels durch eine
Widerstandskombination

Damit ergeben sich zunächst für die Anwendung eines Widerstandsnetzwerkes in der Geoelektrik eine Vielzahl von Möglichkeiten, Schichtverteilungen zu realisieren.

Das vorliegende Netzwerk ist vorerst nur als Versuchsgerät aufgebaut und besteht deshalb nur aus einer minimalen Anzahl solcher Widerstandswürfel.

Um beim Aufbau des Netzwerkes den bereits mehrmals erwähnten Bedingungen nach einer unendlich ausgedehnten Ebene und einem unendlich tief reichenden Substratum recht nahe zu kommen, wurden die Grenzen des abgebildeten Volumens wie folgt festgesetzt: Die Oberfläche des Gebietes ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von 4 000 m. Nach unten erstreckt sich der Erdboden 2 000 m tief. Außerhalb dieser Grenzen ist der spezifische Widerstand unendlich hoch, während innerhalb dieses Gebietes drei horizontalliegende Schichten realisiert worden sind, von denen die oberste 10 m mächtig ist und einen spezifischen Widerstand von 10 000 Ohmmeter hat. Die mittlere Schicht ist ebenfalls 10 m mächtig, hat aber einen kleineren spezifischen Widerstand ($\varrho_2 = 1\,000$ Ohmmeter). Die dritte Schicht schließlich ist 1 980 m mächtig und hat wieder den spezifischen Widerstand der ersten Schicht von 10 000 Ohmmeter.

Denkt man sich im Mittelpunkt der Erdoberfläche dieses eben beschriebenen Gebietes ein rechtwinkliges Koordinatensystem angebracht, bei dem die Meßgerade auf der x-Achse

liegt, die y-Achse senkrecht dazu verläuft und die z-Achse vom Mittelpunkt nach unten zeigt, so bekommt man, wenn man sich dieses große Volumen mit einem entsprechenden Gerät entlang der x- und y-Koordinaten in z-Richtung durchtrennt denkt, vier gleiche Quader, die aus je drei Schichten bestehen. Jeder dieser so gewonnenen zwölf großen Quader wird weiter zerlegt in viele kleinere und größere Quader, deren elektrische Eigenschaften dann durch entsprechende Widerstandskombinationen analogisiert werden.

Die ungleichförmige Aufteilung des ganzen Gebietes ist dadurch bedingt, daß nur eine begrenzte Anzahl von Widerständen, etwa 5 200 Stück, vorhanden war, aus denen wiederum nur eine begrenzte Anzahl von Widerstandswürfeln aufgebaut werden konnte. Die Würfeleinheiten, die den kleineren Erdquadern entsprechen, haben wir im Zentrum an der Oberfläche des Gebietes angebracht, da dort die Potentialdifferenzmessungen durchgeführt werden. Nach außen hin sind die einzelnen Kantenlängen der Erdquader wesentlich größer gewählt. (Die Kantenlängen der dazugehörigen Widerstandswürfel dagegen bleiben konstant, denn diese Kantenlängenänderungen der Erdwürfel werden durch die Widerstandswerte dargestellt.)

Dieser uneinheitliche Aufbau des Netzwerkes sollte zeigen, inwieweit ein derartig sparsam mit Widerstandswürfeln ausgerüstetes Gerät auch für noch folgende Netzwerkkonstruktionen verwendet werden kann, ohne daß die Qualität der Meßergebnisse darunter leidet.

Im Mittelpunkt der Oberfläche dieses Gebietes soll auch der Mittelpunkt der Schlumberger-Meßanordnung liegen. Nach beiden Seiten symmetrisch erstreckt sich die Meßgerade mit den am Anfang bereits erwähnten Potentialsondenentfernungen $a/2 = 0.5$ m und den Stromzuführungspunkten bei $L/2 = 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50, 60$ und 100 m.

Eine Aufteilung in zwölf Einheiten, die in Stahlrahmen befestigt wurden, war deshalb notwendig, weil ein einziger Kasten beim Aufbau und später beim Messen zu unbequem zu handhaben gewesen wäre. Dies ergibt sich aus den Maßen: Acht Einheiten haben je eine Größe von

87 cm x 68 cm x 48 cm

und vier Einheiten eine solche von

87 cm x 68 cm x 17 cm.

Das ganze Modell, das auf Abbildung 6 zu sehen ist, hat eine Gesamtgröße von

225 cm x 180 cm x 68 cm.

Zur Verbindung der zwölf Würfel untereinander wurden etwa 1 800 m isolierter Schaltaht verbraucht. Der Durchmesser des Kupfer-Schaltahtes beträgt 0.8 mm. Die einzelnen Drahtverbindungen sind zu Kabelbäumen zusammengefaßt und werden über Lüsterklemmen geschaltet.

Die verwendeten Widerstände sind in der Mehrzahl Kohle-schichtwiderstände mit einer Toleranz von ± 1 %. Hinzu kommt eine kleinere Anzahl von Drahtwiderständen, die für

Werte unter 50 Ohm gebraucht worden sind. Auch die Toleranzen dieser Drahtwiderstände betragen $\pm 1\%$. Die Widerstandswerte variieren zwischen 400 Kiloohm und 0.1 Ohm.

Der bereits erwähnte uneinheitliche Aufbau des Netzwerkes, bei dem die kleineren Erdwürfel in der Nähe des Mittelpunktes der Meßanordnung liegen und die größeren weit davon entfernt, bedingt, daß entsprechend die großen Widerstandswerte im Zentrum liegen, während die kleineren Widerstände weit außerhalb angeordnet werden, denn der Widerstand R_x beispielsweise wird bei gering wachsendem l_x und stärker wachsendem Querschnitt q_{yz} der Quader stets kleiner:

$$R_x = \varrho \cdot \frac{l_x}{q_{yz}}$$

(l_x = Länge der Quader in der x-Richtung)

Der Einfluß des endlichen Widerstandes der vielen Drahtverbindungen zwischen den einzelnen Schichteinheiten kann vernachlässigt werden, weil die jeweiligen Verbindungen nur zwischen Widerstandswürfeln bestehen, deren Werte groß sind im Vergleich zum Widerstand der Verbindungsdrähte. Die Anordnung ist so gewählt, daß die kleinen Widerstände, die in der Größenordnung von 10 Ohm liegen, nicht mehr durch derartige Verbindungen überbrückt werden brauchen.

Die Grenzbedingungen an den Schichtgrenzen ($j_{n1} = j_{n2}$ usw.) sind dadurch berücksichtigt worden, daß jedem Knotenpunkt an der Unterseite der oberen Schicht der entsprechende

Knotenpunkt an der Oberseite der unteren Schicht zugeordnet wurde.

Das Schaltbild wird der Arbeit nicht beigelegt, da es wegen der unterschiedlichen Maßenweite und vor allem wegen des dreidimensionalen Aufbaues des Netzwerkes recht umfangreich und wegen der elementaren Schaltung von jeweils sechs Widerständen zu einem Knotenpunkt sehr einfach zu verstehen ist.

Die Gleichstromversorgung erfolgt durch ein stabilisiertes Netzgerät. Die Stromstärken, die für die Messungen verwendet wurden, betrugen maximal 110 mA. Die Potentialdifferenzen zwischen den entsprechenden Sonden wurden mit einem sehr empfindlichen Spiegelgalvanometer gemessen. Der Lichtzeigerweg beträgt dabei 5 130 mm. Alle Ausschläge, die größer als 700 mm waren, wurden entsprechend korrigiert.

Infolge eines Defektes, der an dem Spiegelgalvanometer nach einer längeren Meßpause bemerkt werden konnte, mußten die Potentialdifferenzmessungen zwischen den Potentialsonden mit einem zweiten Spiegelgalvanometer fortgesetzt werden.

Zur Beurteilung der mit den verschiedenen Spiegelgalvanometern gemessenen Kurven seien im folgenden die Meßergebnisse einer Zweischichtanordnung - mit verschiedenen

Instrumenten registriert - tabellarisch und grafisch angegeben. (Abb. 8)

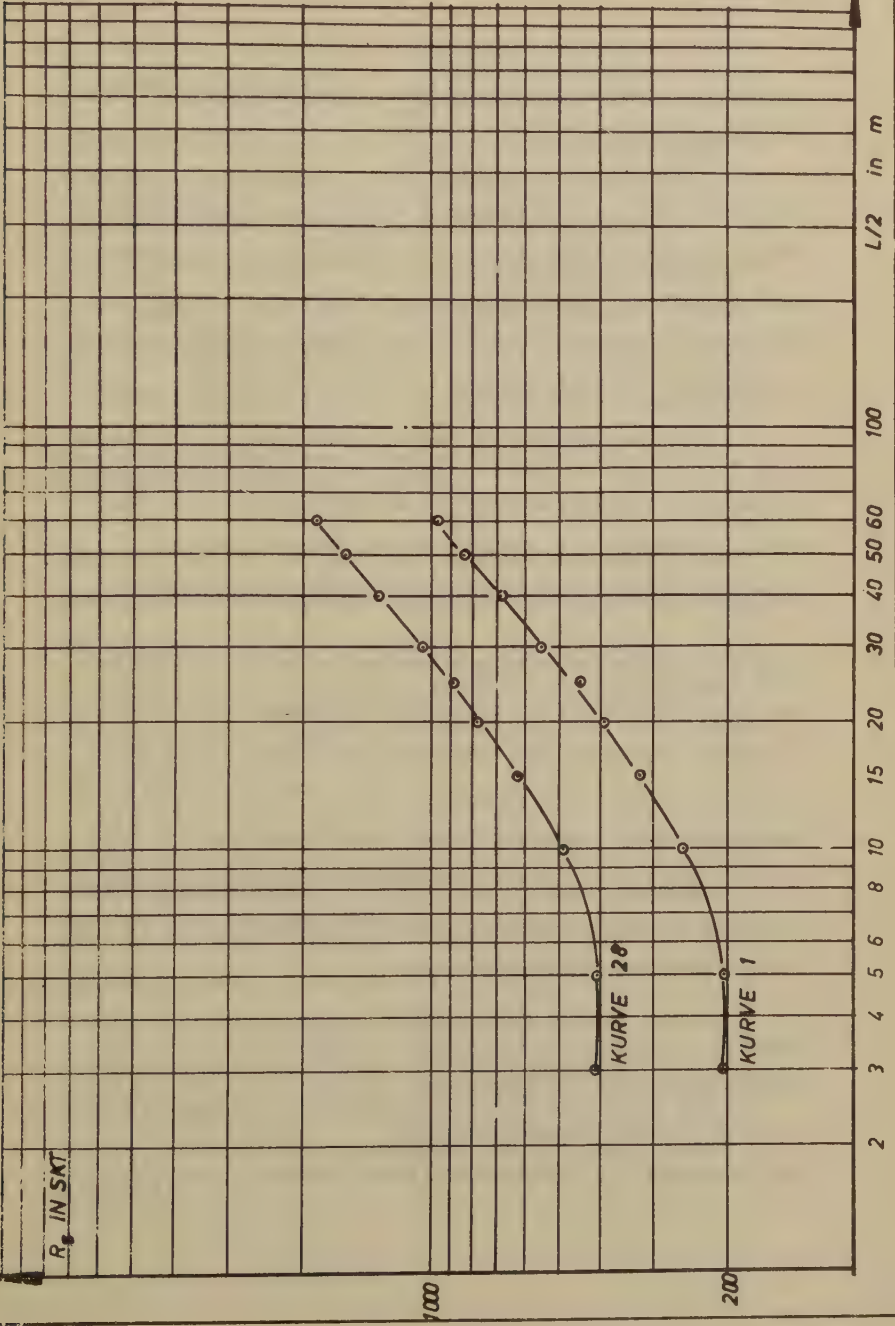
Die Angaben in der folgenden Tabelle werden in Skalenteilen gemacht.

L/2	1. Spiegelgalvanometer	2. Spiegelgalvanometer	Verhältnis der Galvanometerausschläge
3	205	4 120	20.0
5	204	4 010	19.7
10	255	4 940	19.4
15	322	6 260	19.4
20	392	7 780	19.8
25	440	8 880	20.2
30	545	10 520	19.3
40	690	13 400	19.4
50	842	16 200	19.3
60	962	18 900	19.6
100	1 160	23 000	19.8

Die Skalenwerte 205 und 4 120 entsprechen einem spezifischen Widerstand von 10 000 Ohmmeter. Dies konnte durch eine Eichung festgestellt werden.

Trotz merklicher Unterschiede zwischen diesen beiden Spiegelgalvanometern ist ein Parallellauf der Meßwerte auf Abbildung 8 deutlich zu erkennen. In der obigen Tabelle sind zusätzlich die Verhältniszahlen der Galvanometerausschläge angegeben, die zwischen 19.3 und 20.2

Abb. 8



leicht pendeln. Diese Werte unterstreichen gleichfalls den Parallellauf.

Die Werte für den scheinbaren spezifischen Widerstand R_s wurden in der obigen Tabelle in Skalenteilen eingetragen, weil es bei all diesen Messungen nicht so sehr auf den Absolutwert ankommt, und der in Skalenteilen angegebene Relativwert vollauf genügt.

Dies erklärt sich aus der Eigenart des Doppel-Logarithmenpapiers, auf das die Meßwerte aufgetragen werden. Es werden deshalb im folgenden einige Bemerkungen zur Parallelverschiebung von Widerstandskurven gemacht.

Eine Parallelverschiebung einer Kurve bedeutet, daß sie von den absoluten Koordinatenwerten gelöst wird und nun in einem funktionellen Verhältnis zu ihnen steht. Eine Parallelverschiebung entspricht damit dem Ergebnis einer Relativmessung, denn auch eine Relativmessung ist von den ursprünglichen Koordinatenwerten getrennt und steht über die Bezugsmessung in einem abhängigen Verhältnis zu den Original-Koordinatenwerten.

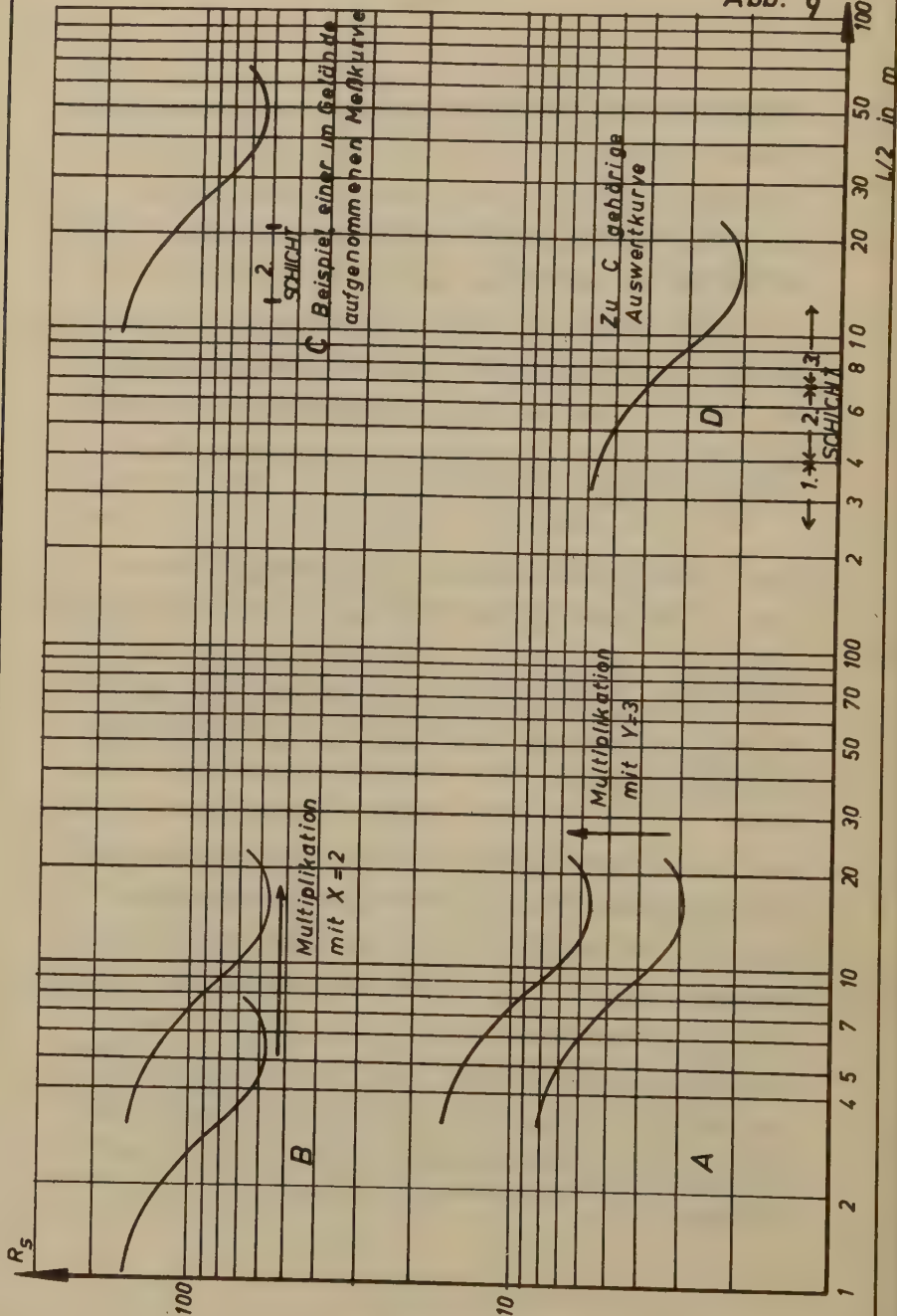
Normalerweise werden die Widerstandskurven auf Doppel-Logarithmenpapier aufgetragen. Auf der Abszisse werden jeweils die Mittelpunktsabstände $L/2$ eingezeichnet, auf der Ordinate die scheinbaren spezifischen Widerstände R_s .

Werden alle Werte einer solchen Widerstandskurve mit demselben Faktor X in einer der beiden Koordinatenrichtungen und mit Y in der anderen Richtung multipliziert, wobei einer der beiden Faktoren, oder trivialerweise auch beide, gleich eins sein können, so entspricht das auf Doppel-Logarithmenpapier einer Addition aller Kurvenpunkte mit dem gleichen Betrag. Die Kurve wird um den Betrag der Faktoren X und Y verschoben, ohne daß ihre Gestalt in irgendeiner Weise deformiert wird. (Abb. 9A, 9B)

Zwei Kurven, in der gleichen Art dargestellt, können somit direkt übereinandergelegt und verglichen werden, selbst dann, wenn die Koordinatenursprungsorte sich nicht decken, wenn also die spezifischen Widerstände der Deckschichten und deren Mächtigkeiten voneinander verschieden sind.

Beispielsweise setzt auf Abbildung 9C die Meßkurve bei einem Abszissenwert $L/2 = 10$ m und einem Ordinatenwert $R_g = 180$ Skalenteile ein. Die dazu passende Auswertkurve habe die davon abweichenden Werte $L/2 = 3.2$ m und $R_g = 6$ Skalenteile. Beide Kurven können jetzt übereinandergelegt werden. Dabei übernehmen wir die Schichtfolge der Auswertkurve 9D auf die Kurve 9C und kennen jetzt die Schichtangaben für den natürlichen Meßpunkt:

Abb. 9



Die Schichtmächtigkeiten betragen für dieses Beispiel auf Abbildung 9C 12 m für die erste Schicht und rund 9 m für die zweite Schicht. Die dritte Schicht beginnt bei 21 m. Ähnlich werden die spezifischen Widerstände R_s an der Ordinate abgelesen.

Allgemein ermöglicht uns der Doppel-Logarithmenmaßstab, theoretisch gewonnene Vergleichskurven als Auswertgrundlagen - unabhängig von speziellen Mächtigkeits- und Widerstandsverhältnissen - zu benutzen.

Thermoelktrische Effekte konnten während der Messungen nicht beobachtet werden.

Nun können wir zur Diskussion der Meßergebnisse übergehen. Alle Messungen beziehen wir dabei, soweit dies möglich ist, auf die von Hummel¹⁾ bereits berechneten Zweischichtkurven H_1 und H_2 , wie sie auf Abb. 4b zu sehen sind. Diese beiden Kurven, die wir auch als Sollkurven bezeichnen werden, gelten für eine Zweischichtanordnung, bei der die zweite Schicht einmal einen sehr hohen spezifischen Widerstand hat, $\gamma^1 \approx \infty$ (Kurve H_1), und zum anderen sehr gut leitend ist, $\gamma^1 \approx 0$ (Kurve H_2). Die Grenze zwischen den

beiden Schichten dieser Anordnung ist in Übereinstimmung mit dem Aufbau des Netzwerkes auf 10 m festgelegt. Anhaltspunkte für die Berechnung der beiden Kurven H_1 und H_2 wurden bereits gegeben.

Abbildung 10 zeigt uns die mit dem Netzwerk gemessene Zweischichtkurve (gestrichelt) zusammen mit der Zweischicht-Sollkurve H_1 (ausgezogen), wie sie jedem Geoelektriker zur Auswertung zur Verfügung steht. Dazu kurz die Daten: Die erste Schicht ist 10 m mächtig und hat einen spezifischen Widerstand von 10^4 Ohmmeter. Der spezifische Widerstand der zweiten Schicht ist unendlich hoch ($\rho_2 = \infty$). Sie dient gleichzeitig als Substratum. Technisch wurde die zweite Schicht dadurch verifiziert, daß alle entsprechenden Kurzschlußverbindungen zu dieser zweiten Schicht unterbrochen wurden.

Die Nebeneinanderstellung der beiden Kurven H_1 und 1 zeigt uns im Bereich bis $L/2 = 20$ m eine gute Übereinstimmung der Meßwerte mit den dazugehörigen Sollwerten. Hier weicht kein Punkt mehr als 2% von seinem Sollwert ab. Die dann folgenden Meßpunkte liegen nicht mehr auf ihrer Sollgeraden, so daß diese Kurve nicht als unmittelbare Auswertgrundlage benutzt werden kann. Verbinden wir die Meßpunkte dieser Kurve zu einem Kurvenzug, so wird eine deutliche Änderung in der Neigung sichtbar. Dies aber könnte bedeuten, daß die erste Schicht keinen konstanten spezifischen

Widerstand besitzt. Damit würde ein Widerspruch zwischen dem auf Seite 28 geplanten und dem gebauten Widerstandsnetzwerk bestehen, was aber eingehende Kontrollen nicht bestätigt haben. Folglich darf man die Kurvenpunkte in der oben angegebenen Art nicht miteinander verbinden, sondern muß eine sprunghafte Parallelverschiebung dieser Meßpunkte zur Hummel-Kurve H_1 annehmen, wie es auf Abbildung 11 gezeigt wird. Für die letzte Annahme spricht auch die fast lineare Beziehung zwischen den Differenzwerten der beiden Kurven H_1 und 1 und den verschiedenen Maschenweiten entlang der Meßgeraden. Diese Differenzwerte betragen für die einzelnen Mittelpunktsabstände $L/2$:

$L/2$	Differenz $H_1 - 1$	Maschenweite bei $L/2$
20	~ 0 cm	5 m zwischen 20 und 25 m
25	~ 0.4 cm	5 m zwischen 25 und 30 m
30	~ 0.4 cm	10 m zwischen 30 und 40 m
40	~ 0.7 cm	10 m zwischen 40 und 50 m
50	~ 0.7 cm	10 m zwischen 50 und 60 m
60	~ 0.8 cm	40 m zwischen 60 und 100 m
100	~ 2.4 cm	

Daß die in dieser Tabelle gezeigten Beziehungen nicht streng linear sind, ist verständlich, denn es ändern sich nicht nur die Maschenweiten entlang der Meßgeraden, sondern auch die zwischen^{den} davon entfernt liegenden Knotenpunkten. Begründet ist dieses Verhalten der Kurve 1 also sehr wahrscheinlich einmal durch die zugroß gewählte Maschenweite und zum anderen durch das sprunghafte Zunehmen der Maschenweiten zwischen den einzelnen Meßpunkten. Die Gleichung (38) ist demzufolge merklich von Null verschieden.

Abb. 10

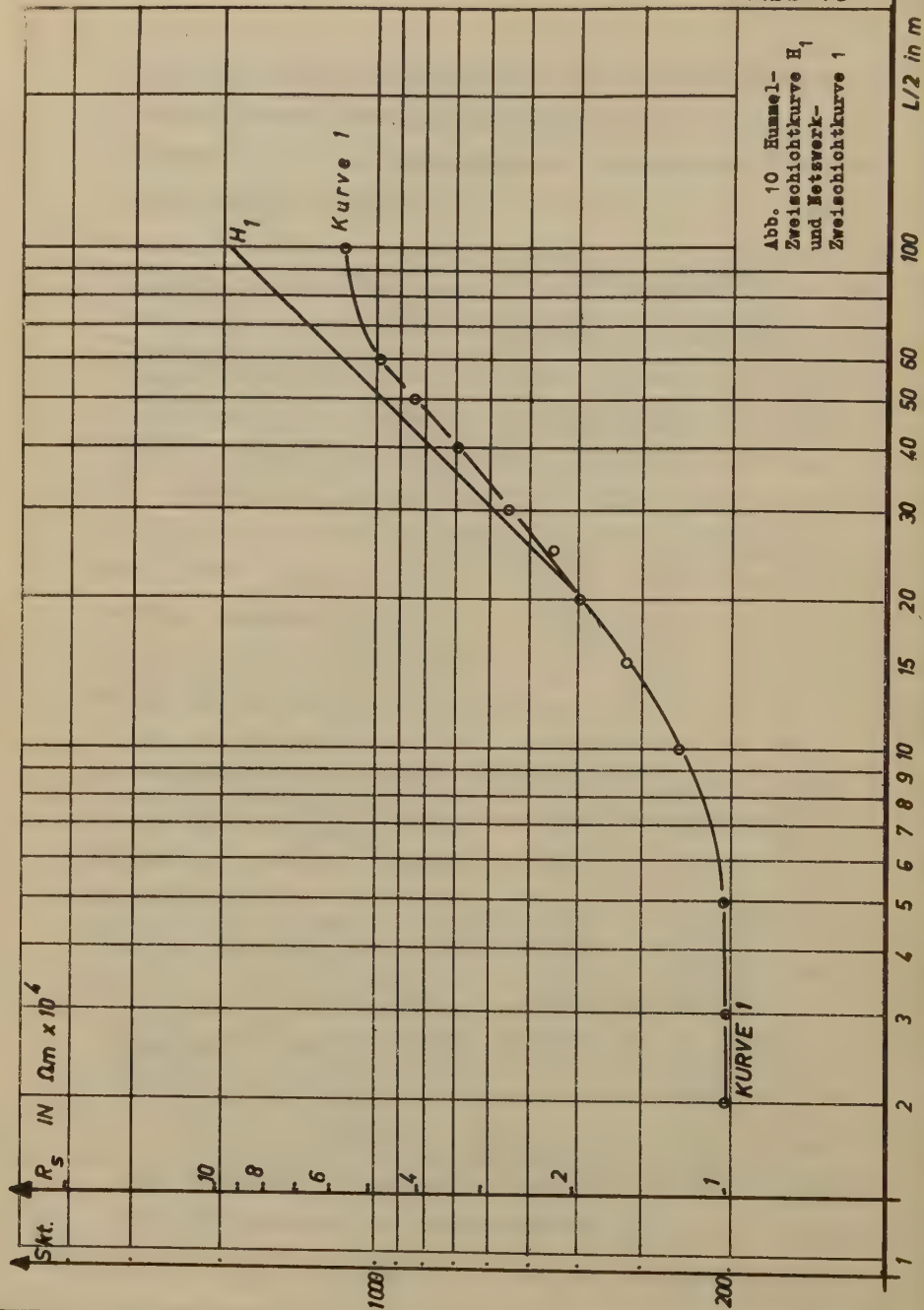


Abb. 10 Kessel-
Zweischichtkurve H_1
und Netzwerk-
Zweischichtkurve 1

Abb. 11

 R_s IN SKT. H_1

Kurve 1

KURVE 1

Abb. 11 zeigt die sprunghafte Änderung der Netzwerk-
kurvenwerte gegenüber der Solllkurve H_1 .

 $L/2$ in m

60

50

40

30

20

15

10

8

6

5

4

3

2

1000

200

100

Wir haben hier einen ähnlichen Effekt, wie er oft bei geoelektrischen Tiefensondierungen beobachtet wird, wenn die Potentialsonden im Verlauf einer Messung versetzt werden müssen. Das wirkt sich in der Form aus, daß die dann folgenden Meßwerte eine sprunghafte Parallelverschiebung erfahren. Man führt dies allgemein auf eine Änderung der Potentialfunktion zwischen den Potentialsonden zurück¹⁰⁾. Beim Netzwerk dürfte die unterschiedliche Maschenweite eine ähnliche Änderung der Potentialfunktion bedingen und so zu den bekannten Abweichungen führen.

Trotzdem aber werden wir im folgenden die von ihren Sollwerten abweichenden Kurvenpunkte zu Kurvenzügen verbinden, denn die Kurven lassen sich so besser lesen und mit anderen vergleichen.

Zu den Abweichungen der Meßkurve 1 von den Sollwerten der Kurve H₁ ist ergänzend zu sagen, daß der Modellrechner ein erstes Versuchsgerät darstellt, an dem die einzelnen Probleme, die bei einem derartigen Netzwerk auftreten, studiert werden können. Es soll primär keine Auswertkurven liefern, sondern zunächst nur zeigen, ob es grundsätzlich möglich ist, ein solches Netzwerk mit Erfolg bei der Behandlung geoelektrischer Probleme einzusetzen.

Am Rande der Abbildung 10 sind zwei verschiedene Ordinatenmaßstäbe angegeben. Die eine Ordinate ist durch das Doppel-Logarithmenpapier gegeben. Auf ihr sind die Werte für den

scheinbaren spezifischen Widerstand R_s eingetragen, die sich nach Gleichung (9) berechnen, wenn man für ΔV nur die am Galvanometer abgelesenen ungeeichten Skalenwerte einsetzt.

Die zusätzliche Skala gibt die Absolutwerte des scheinbaren spezifischen Widerstandes R_s in Ohmmeter an und geht auf eine Eichung der Galvanometerskala zurück.

Im folgenden werden die Ordinatenangaben des scheinbaren spezifischen Widerstandes R_s der Einfachheit halber stets in Skalenteilen, abgekürzt Skt, angegeben werden. Durch eine sehr einfache Umrechnung lassen sich daraus die Absolutwerte ableiten, die allgemein für unsere Betrachtungen aber nicht sehr bedeutsam sind. Dazu wurde auf Seite 34 ausführlich Stellung genommen.

Kommen wir nun zu Kurve 2 auf Abbildung 12. Die dazugehörigen Daten sind:

Die erste Schicht ist, wie bei allen Messungen, 10 m mächtig und hat einen spezifischen Widerstand von 10 000 Ohmmeter. Als zweite Schicht folgt das unendlich mächtige Substratum, dessen spezifischer Widerstand praktisch gleich Null ist. Die Schaltung dieser zweiten Schicht sieht jetzt so aus, daß sämtliche Verbindungsbuchsen von der ersten zur zweiten Schicht per

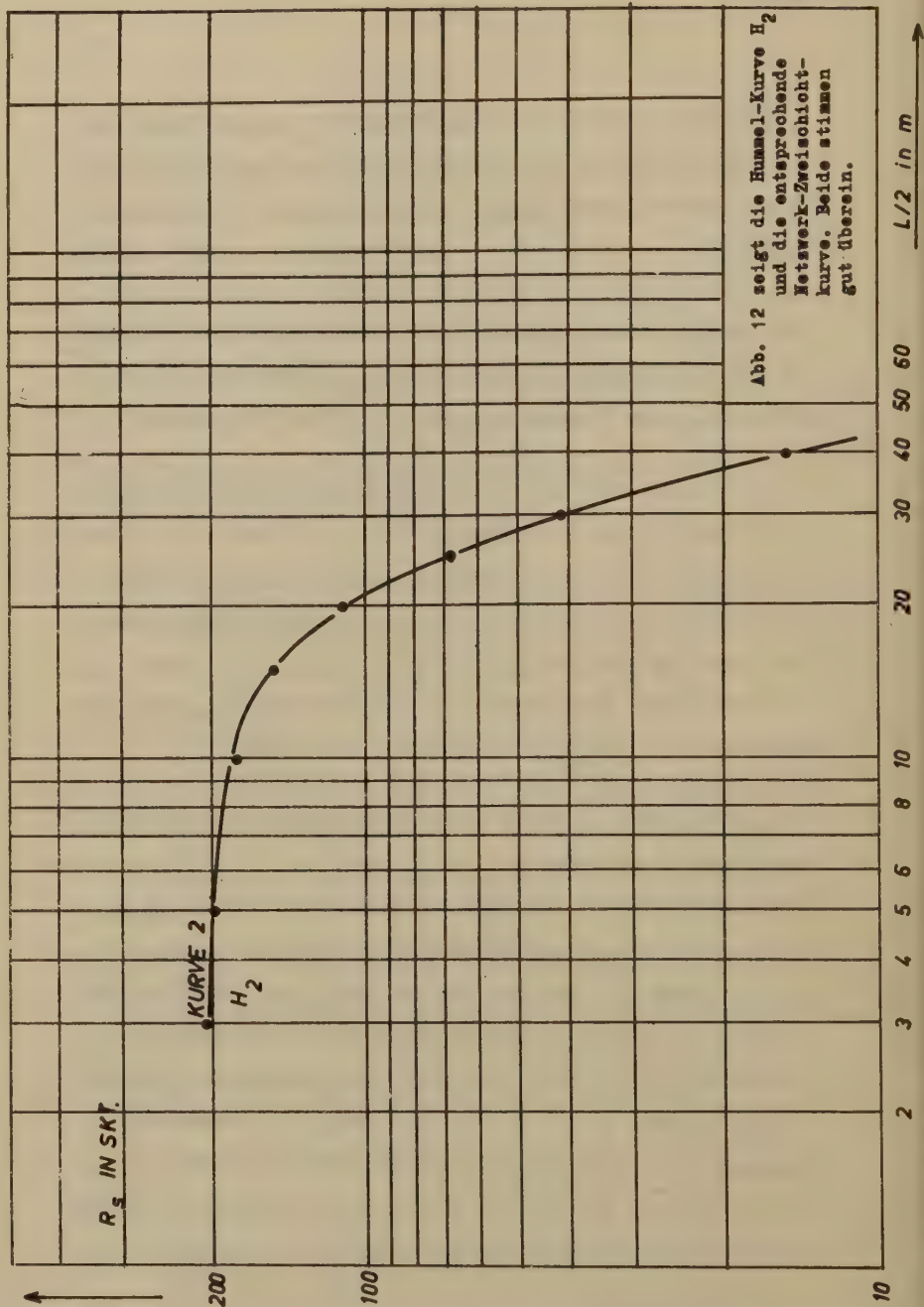


Abb. 12

Abb. 12 zeigt die Hummel-Kurve H_2 und die entsprechende Netzwerk-Zweischichtkurve. Beide stimmen gut überein.

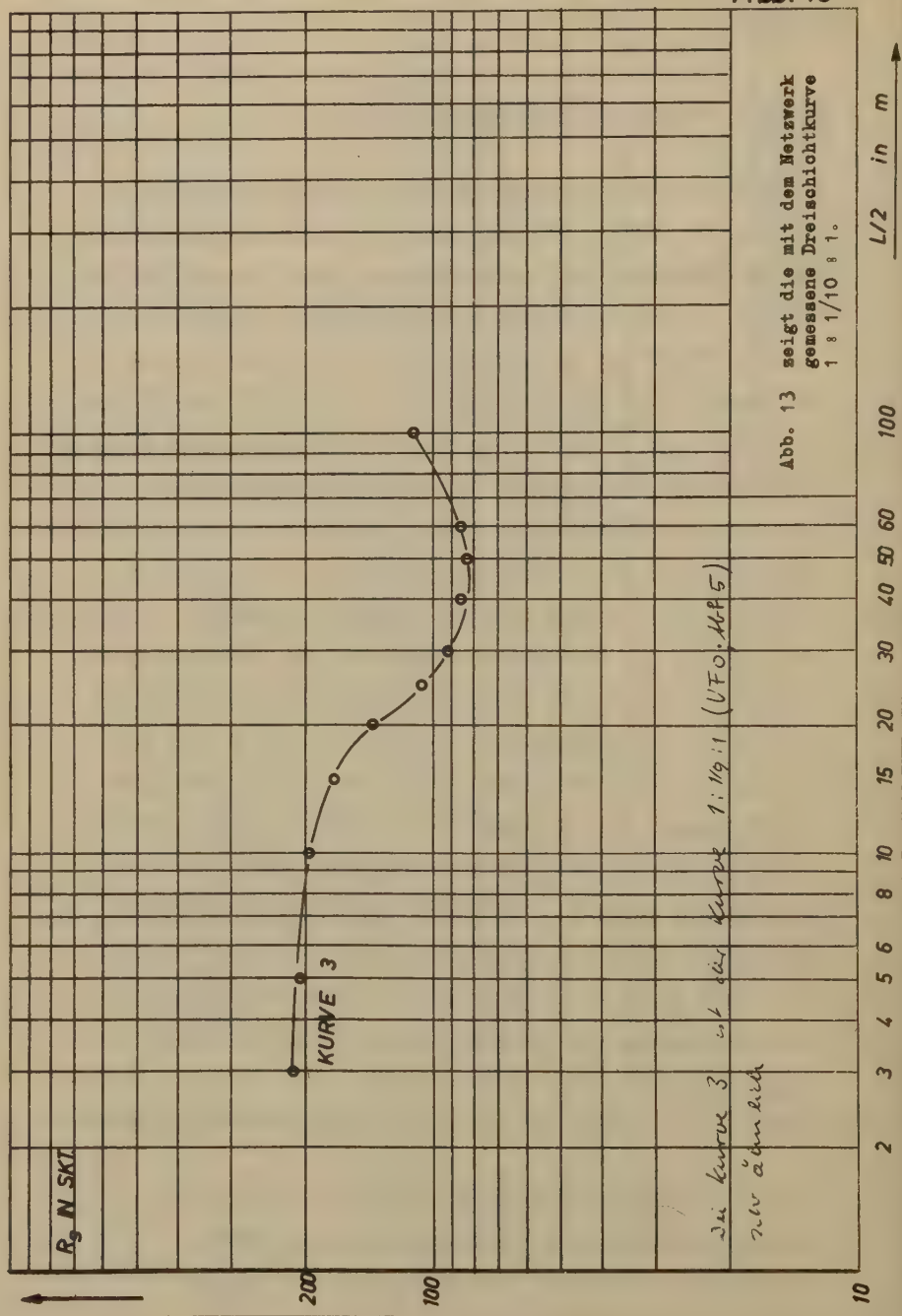
Kurzschlußschienen überbrückt worden sind.

Hier zeigt der Vergleich zwischen der mit dem Netzwerk gemessenen Kurve 2 und der berechneten Zweischichtkurve H_2 , daß kein Meßwert von seinem Sollwert mehr als 2% abweicht. Es ist im ersten Augenblick erstaunlich, dies festzustellen, denn wir haben gesehen, daß die Abweichungen der Kurve 1 von ihrer Sollage H_1 teilweise erheblich sind. Dies kann man so deuten, daß der elektrische Strom zwischen den potentialsondennahen Stromzuführungspunkten bei $L/2 = 3, 5$ und 10 m fast ausschließlich durch das in diesen Gebieten fein unterteilte Netzwerk der ersten Schicht fließt, wie dies auch bei der Meßkurve 1 der Fall war. Je weiter sich die Stromzuführungselektroden vom Mittelpunkt entfernen, desto mehr wird der elektrische Strom auf seinem Weg zur gegenpoligen Elektrode den Weg über das hochohmige Netzwerk meiden und entlang der Kurzschlußverbindungen, die die zweite Schicht darstellen, fließen. Innerhalb dieser Kurzschlußverbindungen kann sich der elektrische Strom wie in einem engmaschigen Netzwerk ausbreiten. Folglich dürften keine Abweichungen auftreten, die durch grobe Maschenweiten bedingt sind. Die gute Übereinstimmung der Meßkurve 2 mit der Auswertkurve H_2 bestätigt dies. Unser Modellrechner arbeitet unter diesen Bedingungen demnach mit einer befriedigenden Genauigkeit.

Auf der folgenden Abbildung 13 ist die mit unserem Netzwerk aufgenommene Dreischichtkurve zu sehen.

Abb. 13

Abb. 13 zeigt die mit dem Netzwerk
gemessene Dreischichtkurve
1 : 8 : 1 / 10 : 8 : 1.



Die Kurve 3 ist die Kurve 1:19:1 (UFO-HF5)
nur ähnelnd

Die erste Schicht dieser Dreischichtanordnung ist 10 m mächtig und besitzt einen spezifischen Widerstand von 10 000 Ohmmeter. Ebenfalls 10 m mächtig ist die zweite Schicht; ihr spezifischer Widerstand beträgt 1 000 Ohmmeter, wie es auf Seite 28 beschrieben worden ist. Es wurden dazu entsprechend kleine Widerstände verarbeitet. An diese zweite Schicht schließt sich das unendlich tiefreichende Substratum an, dessen Leitfähigkeit gleich Null ist.

Leider ist es nicht möglich gewesen, hierfür die passende Auswertkurve $1/10 : 1$ zu bekommen, so daß wir keinen exakten Vergleich zwischen den Sollwerten und den realen Kurvenwerten durchführen können. Sicherlich wären auch hier einige Abweichungen zu erklären gewesen, wie wir sie ähnlich bei der Besprechung der Kurve 1 diskutiert haben.

Die ersten beiden Messungen haben uns gezeigt, daß die Genauigkeit der Netzwerkkurven auch von der Anordnung der Schichten abhängt. Es kommt darauf an, was wir an das Netzwerk der ersten Schicht anschließen: ein sehr gut oder sehr schlecht leitendes Substratum, oder eine begrenzte Schicht mit grober Maschenweite. Es ist nicht so, daß die Potentialfunktion entlang der Meßgeraden ^{unabhängig von der Maschenweite ist} konstant bleibt, sondern, wie es nicht anders zu erwarten war, eine Funktion aller Maschenweiten des Netzwerkes ist, und nicht nur eine Funktion der Maschenweite der ersten Schicht. Wir müssen deshalb ^{explizit} für jede Schichtkombination eine andere Korrektionsfunktion ansetzen. Bei diesem

* Siehe hierzu: Bemerkung auf Abb. 13

ersten Netzwerk soll aber auf diese, durch den unregelmäßigen Aufbau bedingte und deshalb umfangreiche Ausgleichung verzichtet werden. Alle noch zu besprechenden Messungen werden, soweit dies möglich ist, zu den oben behandelten zwei Kurven in Beziehung gesetzt werden. Damit ^{werden} geiten dann auch die entsprechenden Abweichungen von den Sollkurven H_1 und H_2 ~~als~~ behandelt und bekannt. In einigen Zweischicht-Fällen kann man, soweit die eingebauten Störungen nicht zu massiv sind, aus den entsprechenden Abbildungen 10 und 12 die jeweiligen Korrektionsgrößen entnehmen und an den betreffenden Kurven anbringen, so daß man damit für die Praxis durchaus brauchbare Auswertkurven gewinnt. Dies gilt vor allem für die große Gruppe von Kurven, die durch in die erste Schicht eingebaute Leitungen in ihren Formen und Charakteren verändert worden sind. (Als Korrektionsgrößen sind die Abweichungen der Kurve 1 von der Auswertkurve H_1 bezeichnet worden, wie sie in der Tabelle auf Seite 38 angegeben wurden.)

Kommen wir nun zu einer weiteren Testmessung. Laut Voraussetzungen muß das elektrische Feld innerhalb des Netzwerkes regelmäßig sein. Speziell müssen alle Knotenpunkte unterhalb des Mittelpunktes auf gleichem Potential liegen. Es darf sich also keine Deformation in der Zweischichtkurve zeigen, wenn wir alle Knotenpunkte unterhalb des Mittelpunktes kurzschließen. In der Natur entspricht dieser Kurzschluß etwa einer im Mittelpunkt

senkrecht nach unten laufenden 10 m langen Rohrleitung.

Die folgende Tabelle zeigt in einer Gegenüberstellung verschiedener Messungen in der Tat den erwarteten Effekt. Zunächst sind die Werte der ungestörten Zweischichtkurve angegeben (a). Bauen wir von der Oberfläche einen 1.5 m langen Metallstab ins Modell ein, so bekommen wir die Werte in der Spalte (b), die keine Änderung gegenüber den Werten der Spalte (a) erfahren. Verlängern wir die Rohrleitung bis zur Schichtgrenze in 10 m Tiefe, so ändern sich auch in diesem Fall die Meßwerte nicht (c). Die Werte sind in Skalenteilen angegeben.

L/2	a	b	c
3	205	205	205
5	204	204	204
10	254	254	254
15	320	320	320
20	394	394	394
25	433	433	433
30	545	545	545
100	1 160	1 160	1 160

An den fehlenden Meßpunkten für $L/2 = 40, 50$ und 60 m wurden wegen der guten Übereinstimmung der vorhergehenden Werte keine Messungen ausgeführt.

Mit diesen Messungen dürfte auch klargestellt sein, daß die Abweichungen der einzelnen Meßkurven von den Sollwerten, wie es oben besprochen wurde, nicht durch ein unkorrekt verlötetes Netzwerk verursacht sind.

Diese eben besprochene Modellkonstruktion ist für die geoelektrische Feldpraxis recht wichtig, denn häufig liegen bei verrohrten Peilbrunnen, die etwa der oben erwähnten Störleitung entsprechen, genaue Angaben über die durchbohrten Schichten vor, die wir für die Eichung unserer Widerstandskurven sehr gern verwenden. Bei einer homogenen Schichtung ist gegen ein solches Vorgehen nichts einzuwenden, doch wird auch gezeigt werden, daß dies nicht immer zulässig ist. Die Kurve 48, die auf Seite 70 erläutert wird, zeigt das recht deutlich. Stimmt die Schichtangabe am Peilbrunnen nicht mit dem Ergebnis der Widerstands-sondierung überein, so kann man darauf schließen, daß die Schichtlagerung nicht den Schlumberger-Voraussetzungen entspricht, und daß man deshalb nicht mehr mit Schlumberger-Kurven auswerten darf.

Im nächsten Abschnitt werden wir einige Zweischichtkurven diskutieren, die sich von den bekannten Zweischichtkurven der Abbildung 9 teilweise sehr deutlich unterscheiden. Bedingt sind diese Veränderungen der Zweischichtkurven durch kleine Störkörper, die in das Netzwerk eingebaut worden sind. Die einfachsten Störungen der homogenen Feldverteilung im Netzwerk lassen sich durch Kurzschlußverbindungen zwischen zwei und mehreren Knotenpunkten verwirklichen. Wir können dabei langgestreckte Kurzschlußverbindungen arrangieren, wie auch flächenförmige und räumliche. Die langgestreckten Kurzschlußverbindungen

können etwa mit Rohrleitungen identifiziert werden, während die anderen Störgebilde entsprechend Metallplatten bzw. Metallblöcke darstellen können. Die letzteren dürfen wir uns beispielsweise als gutleitende Erzvorkommen vorstellen.

Zunächst befassen wir uns mit den linienförmigen Störungen, das heißt mit Störungen, die durch lange dünne Metallrohrleitungen hervorgerufen werden. Häufig treten diese Metallrohrleitungen in Form von Wasserleitungen in Erscheinung, die unsere Kulturlandschaften kreuz und quer durchziehen. Wir müssen deshalb in der geoelektrischen Feldpraxis ständig damit rechnen, über eine verborgene Wasserleitung hinwegzumessen. Leider aber wissen wir noch nicht, wie eine Wasserleitung Zwei- und Mehrschichtkurven beeinflußt, so daß wir umgekehrt aus ihrem Kurvenverlauf bisher noch nicht auf die Gegenwart einer störenden Wasserleitung schließen konnten.

Beispielsweise ist eine Gemeinde durch die ständig zunehmende Einwohnerzahl gezwungen, neue Brunnen für die Trinkwasserversorgung anzulegen. Dafür steht ihr lediglich ein mehrere Hektar großes Gelände zur Verfügung, das während des letzten Krieges als Feldflugplatz benutzt worden ist. Hier wurden sicher einige Wasserleitungen verlegt und Kabel, deren Isolation teilweise schon verrottet ist. Ein Lageplan dieser Leitungen ist nicht mehr vorhanden. Also sondiert man das Areal wie jedes andere, man legt die Meßpunkte nur unter Berücksichtigung der Oberflächenformen

des Geländes fest. Die Auswertung der Tiefensondierungen erfolgt ebenfalls ohne Berücksichtigung der eventuell vorhandenen metallischen Leiter, denn bisher liegen keine Auswertkurven vor, die für diese spezielle Bodenbeschaffenheit berechnet worden sind.

Bei der Vermessung erhält man oft genug uneinheitliche Widerstandskurven, die nicht recht zusammenpassen, obwohl die Meßpunkte dieser Kurven nur einige hundert, ja manchmal nur einige zehn Meter auseinanderliegen.

Werden nach dieser Auswertung Bohrpunkte festgesetzt und Bohrungen vorgenommen, so stellt man manchmal mit Erstaunen fest, daß sich das Bohrprofil und das geoelektrische Widerstandsprofil erheblich voneinander unterscheiden.

Möglicherweise sind für diese Fehlauswertungen metallische Leitungen verantwortlich, nur kann man das nicht mit Sicherheit sagen, da die Einflüsse dieser Störungen auf normale Zwei- und Mehrschichtkurven bisher nicht bekannt sind.

Neben diesem Flugplatz-Beispiel finden wir solche Rohrleitungen auf fast allen Viehweiden, die weite Teile der Norddeutschen Tiefebene und des süddeutschen Alpenvorlandes einnehmen.

Die im folgenden diskutierten Kurven sollen dazu beitragen, wenigstens einen groben Überblick über die auftretenden Effekte zu geben.

Bevor wir zur Diskussion weiterer Meßkurven übergehen, werden wir zunächst den effektiven Leitungsquerschnitt der betreffenden Rohrleitungen abschätzen, die wir in unserem Modell mit einfachen Kurzschlüssen analogisieren wollen. Wir müssen wenigstens größenordnungsmäßig wissen, wie stark oder wie dünn die Leitungen sein dürfen, damit sie die nachher gezeigten Kurvendeformationen hervorbringen können.

Das Widerstandsnetzwerk ist so aufgebaut, daß jedem Widerstandswürfel ein Volumenelement Erde entspricht. Nehmen wir an, wir haben einen Kubikmeter Erdboden und darunter einen Kubikmeter massives, gutleitendes Metall. Dies würde im Netzwerk so aussehen, daß an den Widerstandswürfel ein Würfel aus gutem Kupferdraht anschließt. Wir lassen jetzt den massiven Metallwürfel sich zu einer Platte komprimieren. Diese Platte sei so dünn, daß, wenn sie aus gleichem Material bestünde wie der Erdwürfel über ihr, sich der Widerstand dieses Erdwürfels nicht ändern würde, würden wir die dünne Erdplatte zum Erdwürfel hinzunehmen. Im Netzwerk bedeutet dies, daß die Vertikalkomponente z gleich Null, und der Kurzschlußdrahtwürfel zu einem Kurzschlußrahmen wird. Im weiteren Verlauf dieser Reduktion ziehe sich auch die y -Komponente

auf ihren Ausgangspunkt zusammen, so daß aus dem Kurzschlußrahmen eine einfache Kurzschlußverbindung zwischen zwei Punkten wird. Diesen Kurzschlußdraht können wir somit auch als dreidimensionalen Widerstandskörper auffassen, bei dem y- und z-Koordinaten sehr klein sind im Verhältnis zur x-Koordinate und auch im Verhältnis zu den drei Koordinaten des darüberliegenden Widerstandswürfels.

Für die Berechnung des effektiven Leitungsquerschnittes nehmen wir an, daß der spezifische Widerstand in den einzelnen Schichten des Netzwerkes konstant bleibt, während die geometrischen Maßangaben der verschiedenen Widerstandswürfel mit kleinen Ungenauigkeiten behaftet sein können. Deshalb dürfen wir die gegebenen 1%-Toleranzen der Widerstände dahingehend auslegen, daß kleine Hohlräume in den entsprechenden Erdwürfeln, die wir durch die Widerstände analogisiert haben, vorhanden sind. Wir nehmen ferner an, daß die Mehrzahl derjenigen Widerstandswürfel, die wir für unsere Berechnung brauchen, alle eine negative Toleranz haben, wie es auch bei Messungen an vielen Widerständen bestätigt wurde. Selbst wenn diese Annahme nicht ganz zutreffen sollte, sind die zu erwartenden räumlichen Veränderungen so minimal, daß sie die möglichen Effekte nicht wesentlich beeinflussen werden. In diesen, durch die negativen Toleranzen geschaffenen Hohlräumen, verlegen wir die Kurzschlußleitungen.

Der nächste Schritt in dieser Überlegung gilt der Frage, wie groß der Querschnitt dieser Hohlräume ist, wenn wir annehmen, daß die Mehrzahl der Hohlräume eines Würfels sich zu einer Röhre anordnen lassen. Wir bauen dann in die zur Verfügung stehende Röhre unsere langgezogenen dreidimensionalen Widerstandskörper mit sehr kleinen spezifischen Widerständen ein. Mit diesem Kunstgriff ändern wir nichts am Volumen der einzelnen Würfel.

Nach Taylor folgt, da der Widerstand R allgemein vom spezifischen Widerstand ϱ des Leiters, von der Länge L des vom Strom durchflossenen Leitungsstückes und von dessen Querschnitt F abhängig ist,

$$R = R(\varrho, L, F)$$

für den absoluten Größtfehler des Ergebnisses:

$$\Delta R = \left| \frac{\partial R}{\partial \varrho} \right| \Delta \varrho + \left| \frac{\partial R}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial R}{\partial F} \right| \Delta F$$

Wir haben in Übereinstimmung mit dem Konstruktionsplan auf Seite 2 angenommen, daß der spezifische Widerstand ϱ fehlerfrei sei, so daß sich die 1%-Fehlertoleranz der Widerstände damit auf die Flächen- und Längenangaben verteilen. Damit gilt für den Fehler der Widerstände:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \left| \frac{\partial R}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial R}{\partial F} \right| \Delta F \\ &= \left| \frac{\varrho}{F} \right| \Delta L + \left| \frac{\varrho \cdot L}{F^2} \right| \Delta F \end{aligned}$$

$$\Delta R = \left| \frac{\partial L}{\partial F} \right| \frac{\Delta L}{L} + \left| \frac{\partial L}{\partial F} \right| \frac{\Delta F}{F}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta F}{F}$$

Der relative Fehler der Widerstände beträgt maximal 1%.

Nehmen wir an, daß $\frac{\Delta L}{L}$ und $\frac{\Delta F}{F}$ gleich groß sind, so ergibt sich ein relativer maximaler Hohlraumquerschnitt von 5%.

Als durchschnittlichen Hohlraumquerschnitt können wir etwa 1% ansetzen, der uns effektiv zum Einbau unseres langgezogenen dreidimensionalen Widerstandskörpers zur Verfügung steht. Dies entspricht bei einer Fläche von einem Quadratmeter ($1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$) einer unbenutzten Fläche von 10 Quadratzentimeter, also einem langgezogenen Widerstandskörper von etwa 3 cm x 3 cm x 100 cm. Dieser Körper hätte, sofern er aus Kupfer bestünde, einen Widerstand von

$$R = \rho \cdot \frac{L}{F}$$

$$R = 0.0175 \times \frac{1}{1000} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}} \cdot \text{Ohm}$$

$$R = 1.75 \times 10^{-5} \text{ Ohm}$$

Der im Netzwerk verwendete Kupferdraht hat einen Durchmesser von 0.8 mm. Das entspricht einem Querschnitt von 0.5 mm^2 . Die Länge des Kurzschlußdrahtes beträgt im Querschnitt 5 cm, denn so groß ist der mittlere geometrische Abstand der Knotenpunkte.

Sein Widerstand beträgt:

$$R = 0.0175 \times \frac{5 \times 10^{-2} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{0.5 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}} \text{ Ohm}$$

$$R = 1.75 \times 10^{-3} \text{ Ohm}$$

Dieser Widerstand ist bei gleichem spezifischen Widerstand um den Faktor 100 größer als der Widerstand des langgezogenen Widerstandskörpers. Das bedeutet, daß unser Kurzschlußdraht nur 1/100 des ihm zur Verfügung stehenden Hohlraumes ausnutzen würde, würden wir ihn entsprechend verlegen.

Wir können also, wenn wir den effektiven Leitungsquerschnitt der im Netzwerk verlegten Rohrleitungen großzügig abschätzen wollen, annehmen, daß er etwa 0.1% der Fläche des Widerstandswürfels ausmacht. Das bedeutet, daß der Querschnitt dieser in einer Schicht vorhandenen Rohrleitungen in der Nähe des Mittelpunktes nicht stärker als $4 \times 1 \text{ cm}^2$ und in entfernteren Knotenpunkten kleiner als $4 \times 100 \text{ cm}^2$ ist. Der Faktor 4 ergibt sich daraus, daß im allgemeinen eine Verbindung zwischen zwei Knotenpunkten von 4 Würfeln begrenzt wird.

Betrachten wir die Kurven 4 und 5 auf der Abbildung 14. Als Vergleichskurve wurde die Kurve H_1 , die ungestörte Zweischichtkurve, eingezeichnet. Die anderen beiden Kurven 4 und 5 sind normale Zweischichtkurven, die durch

die Auswirkungen verschiedener Kurzschlüsse, die in 3 m unter der Meßgeraden liegen, deformiert worden sind. Die dazugehörigen Längen der Rohrleitungen sind bei den einzelnen Kurven unterschiedlich und betragen 10 m bei Kurve 4 und 20 m bei Kurve 5. Die Lage der Kurzschlußleitungen ist auf Abbildung 15 eingezeichnet.

In deutlicher Form demonstrieren diese drei Kurven der Abbildung 14, wie aus der ungestörten Zweischichtkurve H_1 über eine kleine Einbuchtung der Kurve 4 bei $L/2 = 5$ m eine ganz neue Kurve entsteht. Mit den bisher vorhandenen Kenntnissen muß die Kurve 5 als Dreischichtkurve^{*)} angesehen und deshalb zwangsläufig falsch ausgewertet werden, denn die Rohrleitung wirkt bei dieser Kurve gleichsam als wenn sich eine zweite Schicht mit etwas größerer Leitfähigkeit eingeschoben hat. Die ursprüngliche 10 m-Schicht scheint dadurch auf 3 bis 5 m komprimiert. Das ganze scheinbare Zweischichtpaket hat sich etwa um den Faktor 1.5 erweitert. Die Schichtgrenze zum Substratum ist dadurch scheinbar von 10 auf 15 m herabgedrückt worden.

Neben dieser um ca. 50 % falsch angegebenen Grenze zum Substratum ist zusätzlich eine Zwischenschicht entstanden, die jeder realen Grundlage entbehrt, sie ist durch eine Rohrleitung vorgetäuscht worden. Bisher hat man keine Möglichkeit gehabt, Beeinflussungen dieser Art zu studieren und mußte sich deshalb mit der oben angegebenen Fehlabschätzung begnügen.

*) Auf Abbildung 5 wurden bereits einige Dreischichtkurven gezeigt, die einen ähnlichen Kurvenverlauf haben.

Abb. 14

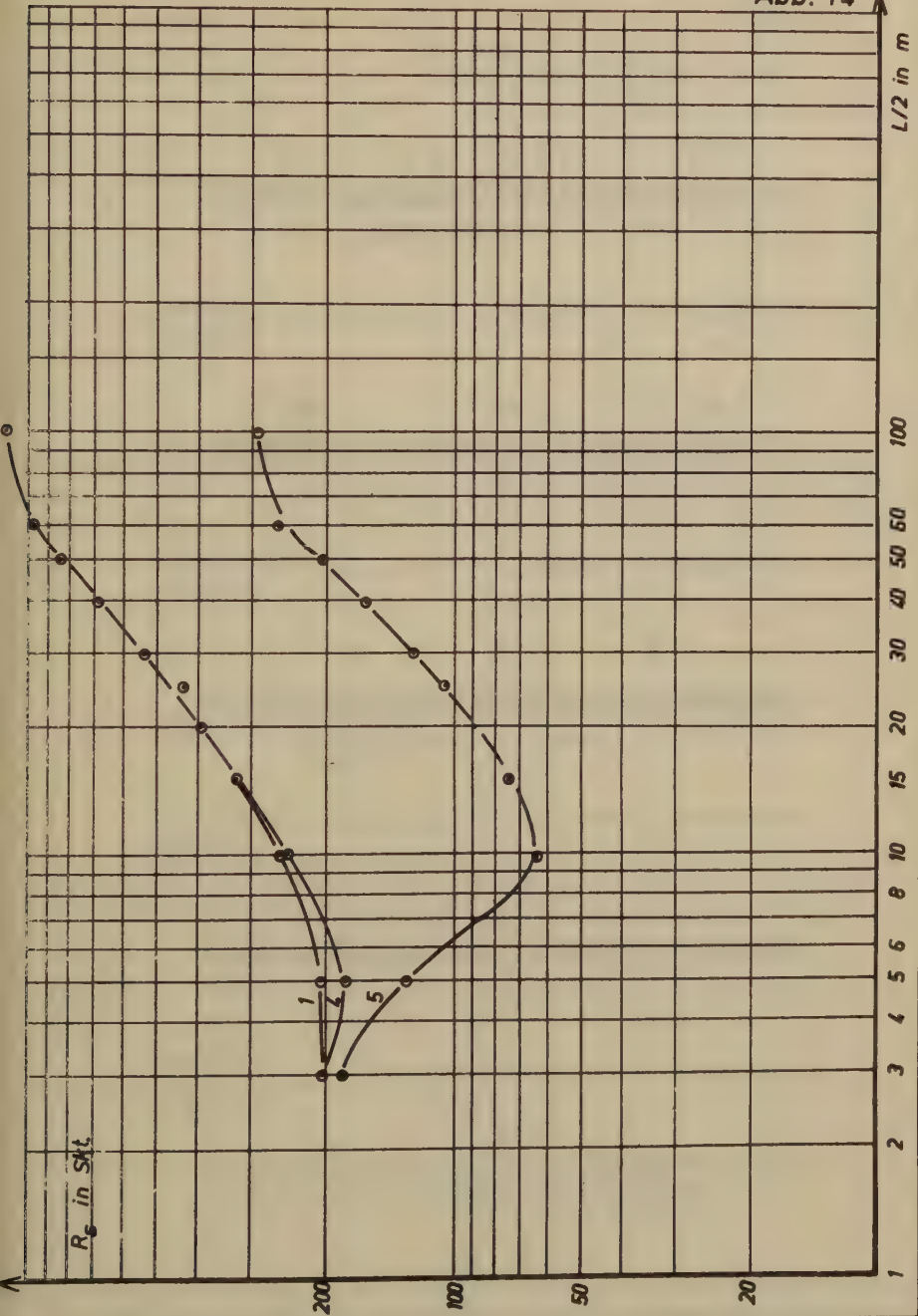


Abb. 15

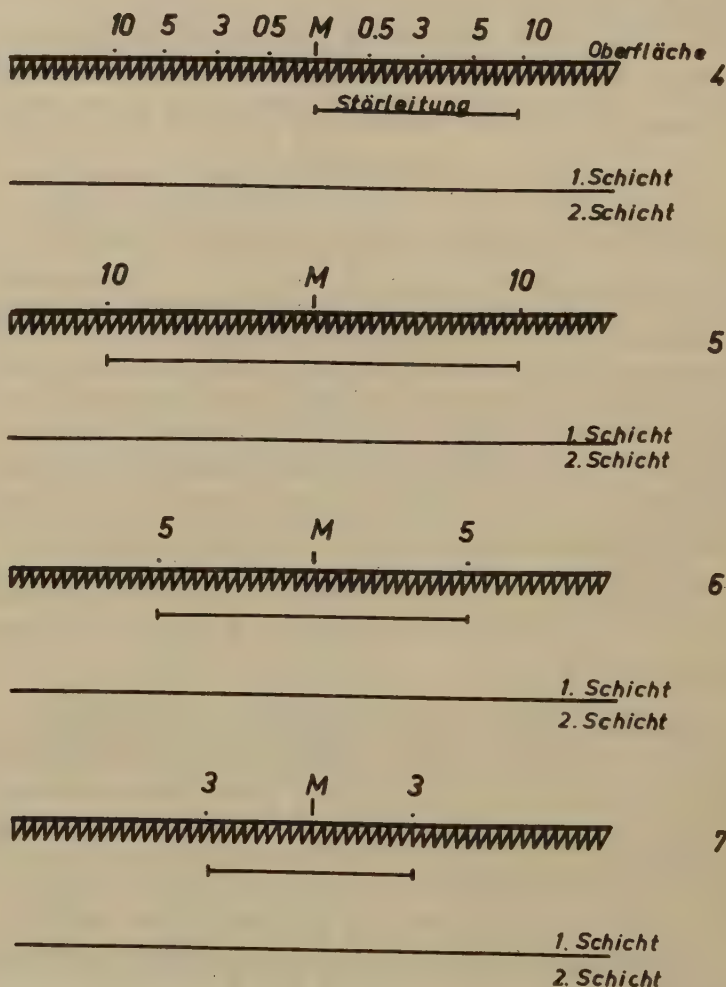
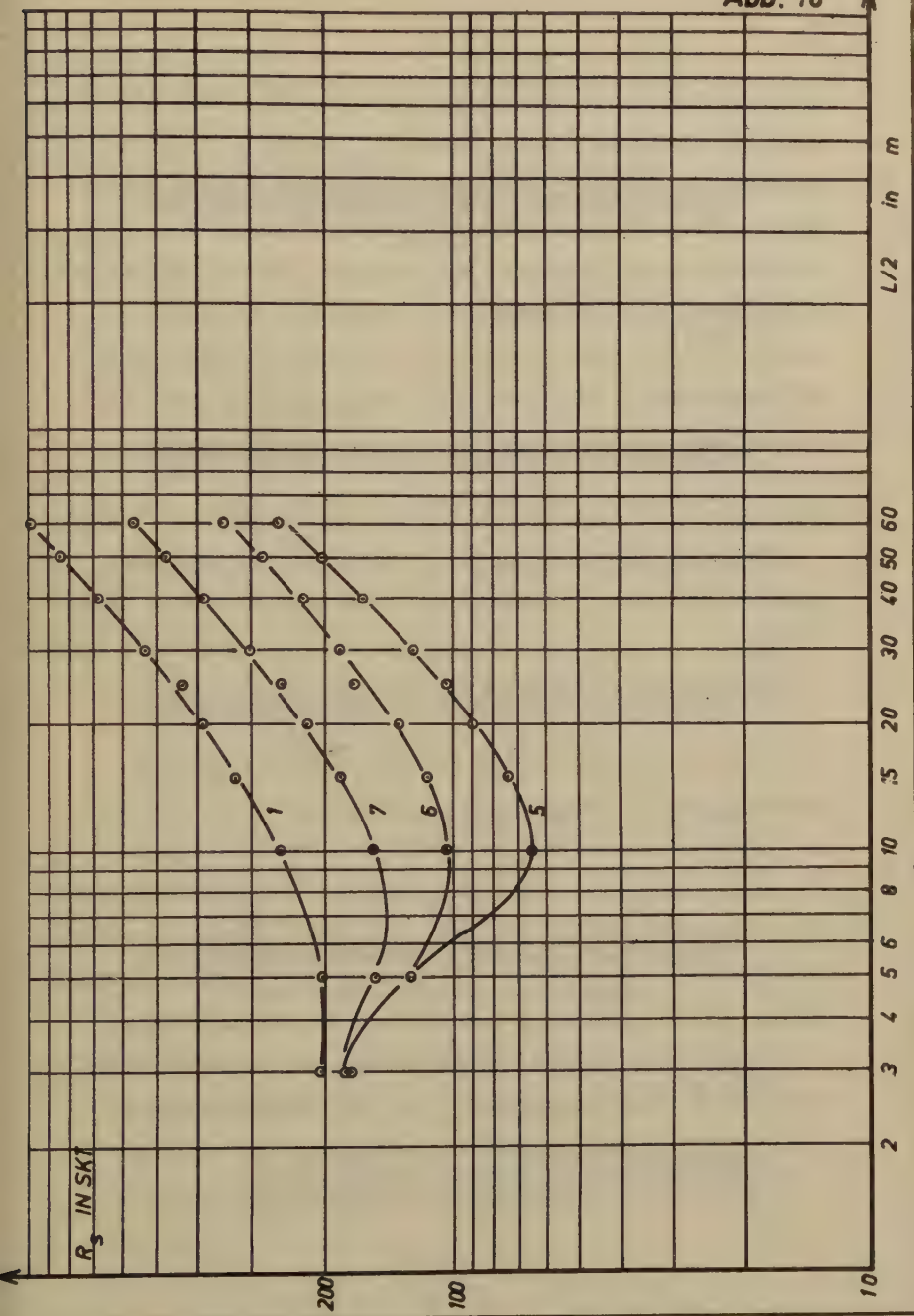


Abb. 15 Die Strecken 4 bis 7 zeigen die Länge und Lage der Störleitungen (Tiefe 3 m unter der Meßgeraden).

Abb. 16



Auch die Kurven auf Abbildung 16 gehören zu dieser eben schon besprochenen Gruppe. Alle drei Kurven 5, 6 und 7 beginnen bei einem spezifischen Widerstand von 180 Skalenteilen, während die ungestörte Zweischichtkurve H_1 bei 205 Skalenteilen einsetzt. Das bedeutet, daß die Rohrleitung nicht nur die Schichtgrenze zum Substratum scheinbar ändert und eine Zwischenschicht vortäuscht, sondern auch den spezifischen Widerstand der Deckschicht um etwa 10% herabdrückt.

Viel deutlicher noch werden die eben gewonnenen Kenntnisse durch die nächste Kurvengruppe belegt. Die Kurzschlüsse liegen hier wieder direkt unter der Meßgeraden. Ihre Tiefe beträgt 0.5 m, ihre jeweilige Länge und ihre spezielle Lage zum Mittelpunkt gehen aus Abbildung 17 hervor.

Deutlich ist die scheinbare Änderung des spezifischen Widerstandes der Deckschicht in Abhängigkeit von der Länge und Lage der Rohrleitung zu verfolgen. Der spezifische Widerstand rutscht von 205 Skalenteilen über Zwischenstufen auf 11 Skaleneinheiten ab. (Abb. 18) Dabei ändert sich die Form der Kurven gegenüber der ungestörten Zweischichtkurve H_1 vorerst nicht. (Kurven 8 und 9) Erst die Kurve 10 zeigt eine deutlich sichtbare Abweichung von der normalen Zweischichtform. Noch weitgehender ist die Einbuchtung der Kurve 11. Die Kurvengestalt ist schon so stark deformiert, daß man dahinter keine normale Dreischichtstruktur mehr

Abb. 17

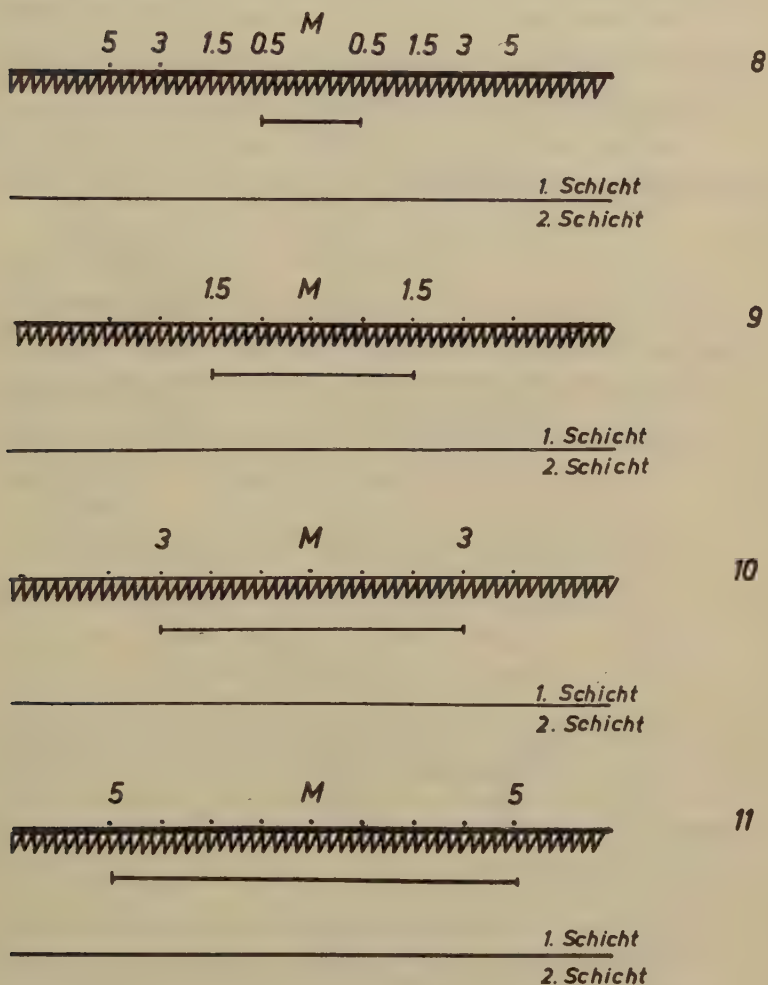


Abb. 17 Die Strecken 8 bis 11 zeigen die Länge und Lage der betreffenden Störleitungen. Ihre Tiefe beträgt 0.5 m unter der Oberfläche.

Abb. 18

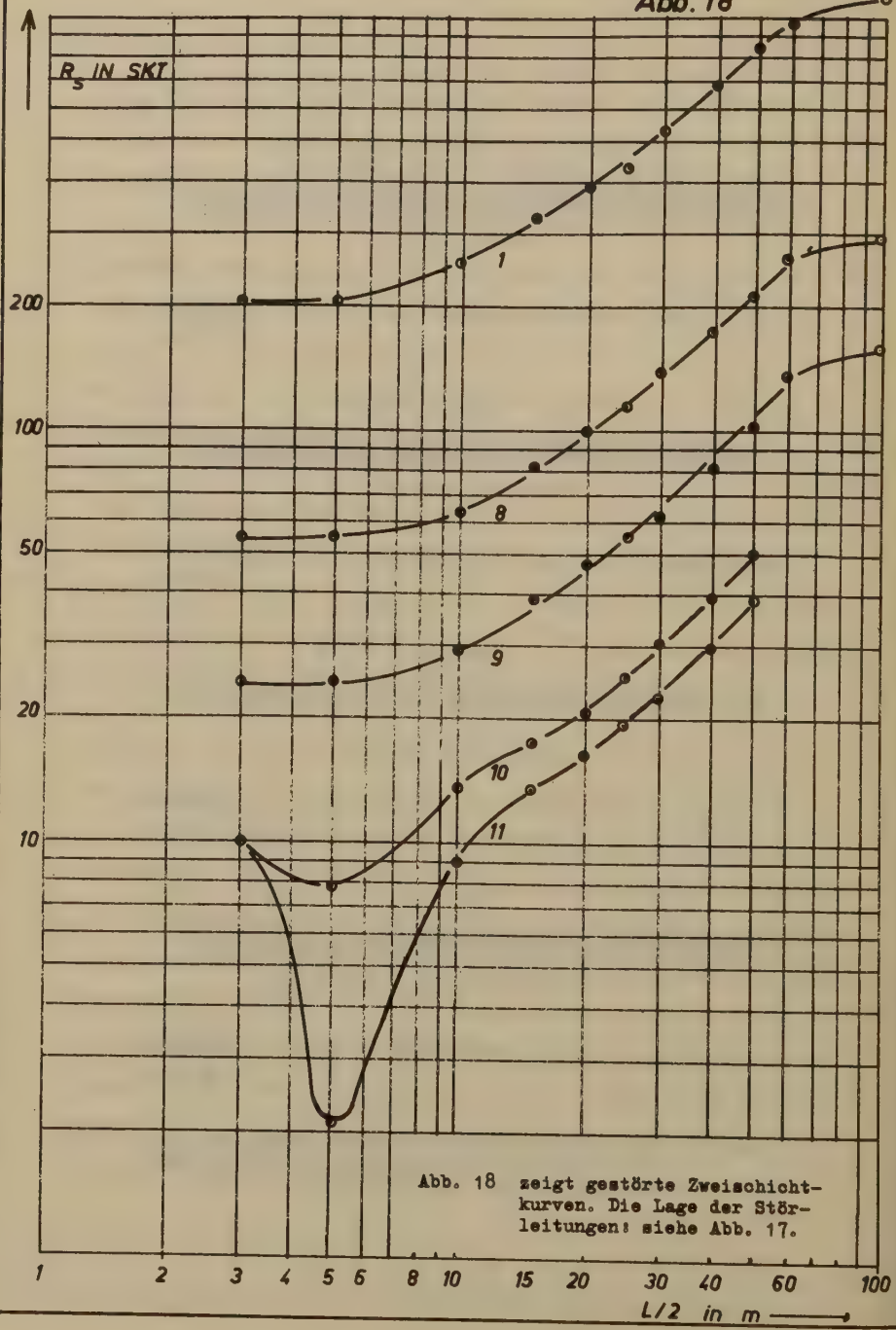


Abb. 18 zeigt gestörte Zweischichtkurven. Die Lage der Störleitungen: siehe Abb. 17.

vermuten kann. Die Neigung an den Flanken der Einbuchtung ist in beiden Richtungen zu groß, um sie mit einer Schlumberger-Auswertkurve vergleichen zu können. In diesem Fall würde ein unvoreingenommener Geophysiker selbstverständlich eine Störung als Ursache dieser Deformation annehmen und die Messung an einem anderen Punkt wiederholen.

Interessant ist ferner festzustellen, daß eine weitere Verlängerung der Rohrleitung über die 10 m-Punkte hinaus keine wesentliche Verlagerung des spezifischen Widerstandes der Deckschicht bringt. Bei etwa 11 Skalenteilen scheint der vorgetäuschte spezifische Widerstand seine tiefste Lage erreicht zu haben.

Eine weitere Gruppe stellen diejenigen Kurven dar, die durch Kurzschlüsse an der Erdoberfläche parallel zur Meßgeraden erzeugt werden. (Abb. 19) Der Abstand dieser Kurzschlußstrecke von der Meßgeraden beträgt 0.5 m. Die Länge und Lage der verschiedenen Kurzschlußverbindungen zum Mittelpunkt gehen aus Abbildung 20 hervor.

Wir sehen bei der Kurve 12 wieder die markante Einbuchtung beim Punkt $L/2 = 5$ m, wie wir es schon besprochen haben. Verkürzen wir die Kurzschlußverbindung um 2 m, so verliert die Kurve diese Einbuchtung und nimmt die normale Zweischichtgestalt an. Gemeinsam mit Kurve 12 hat diese Kurve 13 lediglich den spezifischen Widerstand der Deckschicht.

Auch die Kurven 14 und 15 zeigen einen normalen Zweischichtverlauf. Ihre spezifischen Widerstände steigen, bedingt durch die Verkürzung der Rohrleitungen, an.

Die Kurve 16 erhalten wir, indem wir die Rohrleitung in der in Abbildung 20 angegebenen Weise anordnen. Jetzt liegt der Kurzschluß hauptsächlich nur noch im Wirkungsbereich einer Potentialsonde. Hierdurch wird die Widerstandskurve beim 5 m-Punkt konvex und bekommt ein eigenartiges Aussehen, wie wir es auch bei den Kurven 17, 18 und 19 beobachten. Bei all diesen Kurven ist der Zusammenhang mit der asymmetrischen Lage der Kurzschlußleitungen zum Mittelpunkt und damit zu den Potentialsonden deutlich zu erkennen.

Diese exzentrisch liegenden Rohrleitungen wirken offensichtlich genauso, als wenn höherohmige Störungen ins Netzwerk eingebaut worden sind, denn alle vier Kurven 16 bis 19 liegen im Widerstandsniveau höher als die dazugehörige Zweischichtkurve 28. Nur ein einziger Meßpunkt der Kurve 19 liegt unterhalb dieser Auswertkurve (bei $L/2 = 3$ m) Die konvexe Krümmung der Kurven im Bereich um $L/2 = 5$ m ist wahrscheinlich ebenfalls auf diese exzentrische Feldverteilung zurückzuführen, die sich vermutlich so auf die Messungen auswirkt, als würden die Potentialsonden nicht mehr auf der Meßgeraden liegen, sondern seitlich davon. Das würde bedeuten, daß die

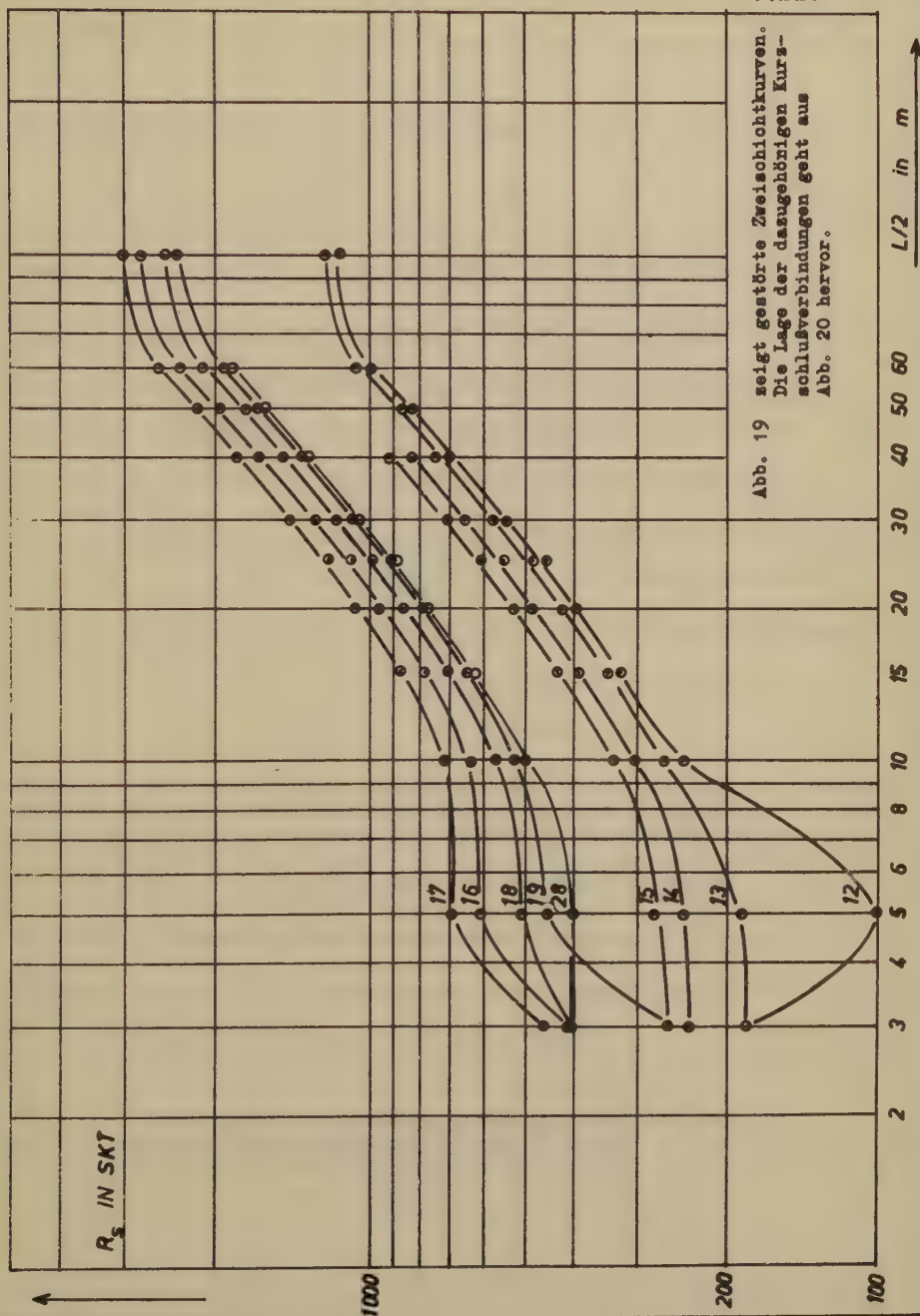


Abb. 19 zeigt gestörte Zweischichtkurven.
Die Lage der dasugehörigen Kurz-
schlussverbindungen geht aus
Abb. 20 hervor.

Abb. 20

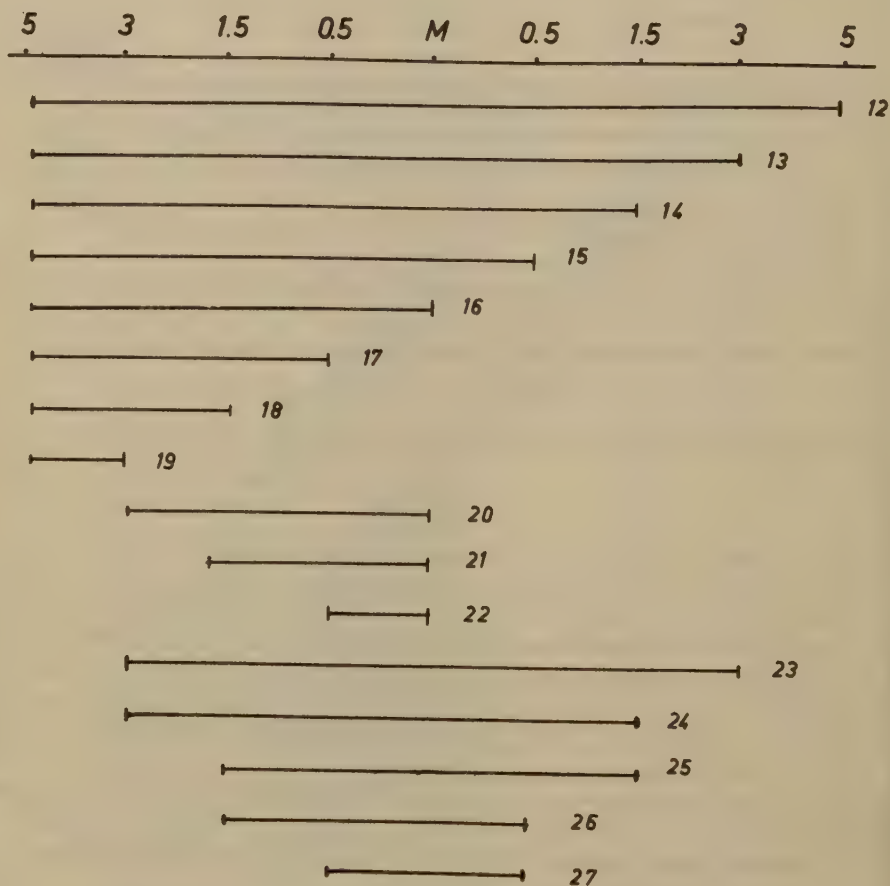


Abb. 20 zeigt die Störleitungen zu den betreffenden Kurven 12 bis 27. Die Störleitungen verlaufen an der Oberfläche in einem Abstand von 0.5 m parallel zur Meßgeraden.

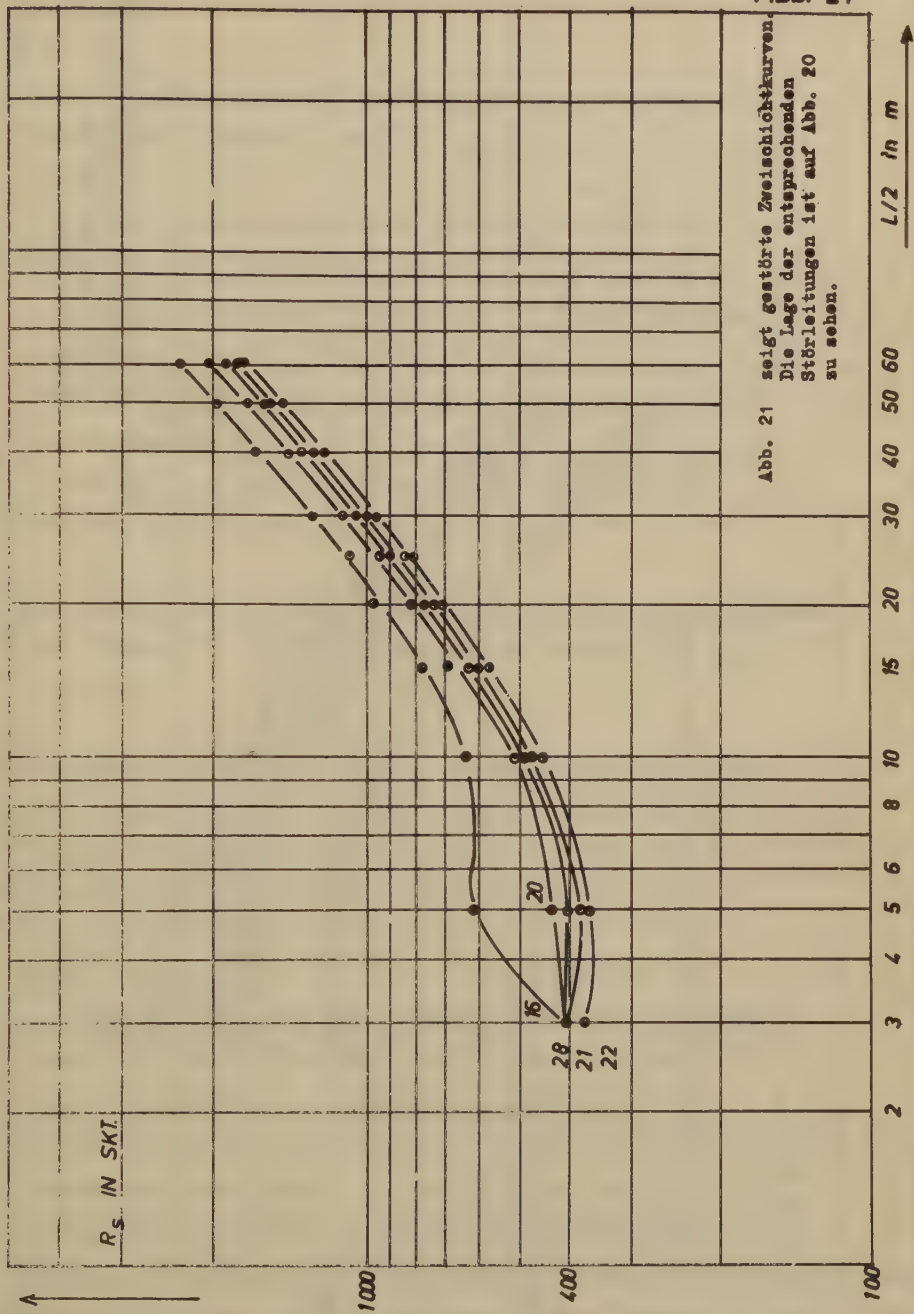


Abb. 21

Abb. 21 zeigt gestörte Zweischichtkurven.
Die Lage der entsprechenden
Störleitungen ist auf Abb. 20
zu sehen.

Abb. 22

 R_s IN SKT.

1000

400

100

L/2 in m

Abb. 22 zeigt gestörte Zweischichtkurven.
Die Lage der entsprechenden Kurs-
schlußverbindungen ist auf
Abb. 20 zu sehen.

29

28

27

26

25

24

23

13

12

Null-Potentialfläche im unmittelbaren Potentialsondenbereich eine stärkere Krümmung bekommen hat, und daß ihr Mittelpunkt an der Oberfläche des Netzwerkes nun nicht mehr mit dem geometrischen Mittelpunkt der Meßanordnung zusammenfällt, sondern eine neue Lage seitlich davon angenommen hat. Dadurch aber liegen die Potentialsonden außerhalb einer zum geometrischen Mittelpunkt symmetrischen Feldverteilung, so daß es scheint, als würden sie abseits der Meßgeraden liegen. Eine Auswertung dieser Kurven 16 bis 19 mit den bekannten ungestörten Zwei- und Mehrschichtkurven ist dadurch ausgeschlossen.

Bei einer anderen Symmetrieanordnung der in 0.5 m Entfernung zur Meßgeraden laufenden Kurzschlüsse bekommen wir die Kurven 16, 20, 21 und 22. (Abb. 21)

Auch auf dieser Abbildung 21 sehen wir wieder das uns schon bekannte Bild. Je nach der Länge des Kurzschlußleiters erhalten wir Zwei- oder Mehrschichtkurven. Die ungestörte Zweischichtkurve 28 läuft sehr eng an die Kurve 21 geschmiegt.

Untersuchen wir jetzt das Verhalten einer Zweischichtkurve, wenn sich der Kurzschluß von beiden Seiten schrittweise auf die Mittelgerade zusammenzieht. Hierfür sind die Kurven 12, 13, 23, 24, 25, 26, 27, 28 und 29 auf Abb. 22 zusammengestellt worden. Die geometrische Lage der dazugehörigen Kurzschlüsse finden wir auf der Abbildung 20.

Der spezifische Widerstand der Deckschicht wird, je länger der Kurzschluß ist, immer mehr herabgedrückt. Schließlich beult die Kurve 12 - wie es bereits besprochen wurde - zu einer Mehrschichtkurve aus. Sehr interessant ist in diesem Zusammenhang die Kurve 29, denn sie ist das Gegenstück zur Kurve 12. Dieselben Knotenpunkte, die bei der Kurve 12 kurzgeschlossen waren, wurden bei Kurve 29 getrennt. Das bedeutet, daß eine sehr hochohmige langgestreckte Störung ins Netzwerk eingebaut worden ist. Diese hochohmige Störung hebt den gesamten spezifischen Widerstand der Deckschicht zu höheren Werten an, ähnlich wie bei den Kurven 16 bis 19. Die Form der Kurve wird dadurch nicht geändert.

Wir kommen nun zu einer weiteren Kurvengruppe. Die an der Oberfläche liegenden Kurzschlüsse sind senkrecht zur Meßgeraden in einem Abstand von 5 m zur Mittelgeraden angeordnet. Siehe dazu Abbildung 23.

Die Störungen der Zweischichtkurve 28 sind recht auffällig. Wir sehen, beträgt der Abstand 5 oder gar 10 m vom Meßpunkt bei $L/2 = 5$ m, dann kann der Kurzschluß beliebig lang sein, sein Einfluß ist minimal. (Abb. 24) (Kurven 28, 30 und 31) Rücken wir mit dem Kurzschluß auf 0,5 m an den Meßpunkt heran, beginnt die Kurve deutlich nach unten auszubeulen. (Kurve 32) Die Deformation wird immer stärker und erreicht bei Kurve 34 ihre tiefste Lage. Hier läuft die Leitung quer über die Profilrichtung. Interessant ist bei diesem Kurvensatz zu beobachten, daß die Neigungen,

Abb. 23

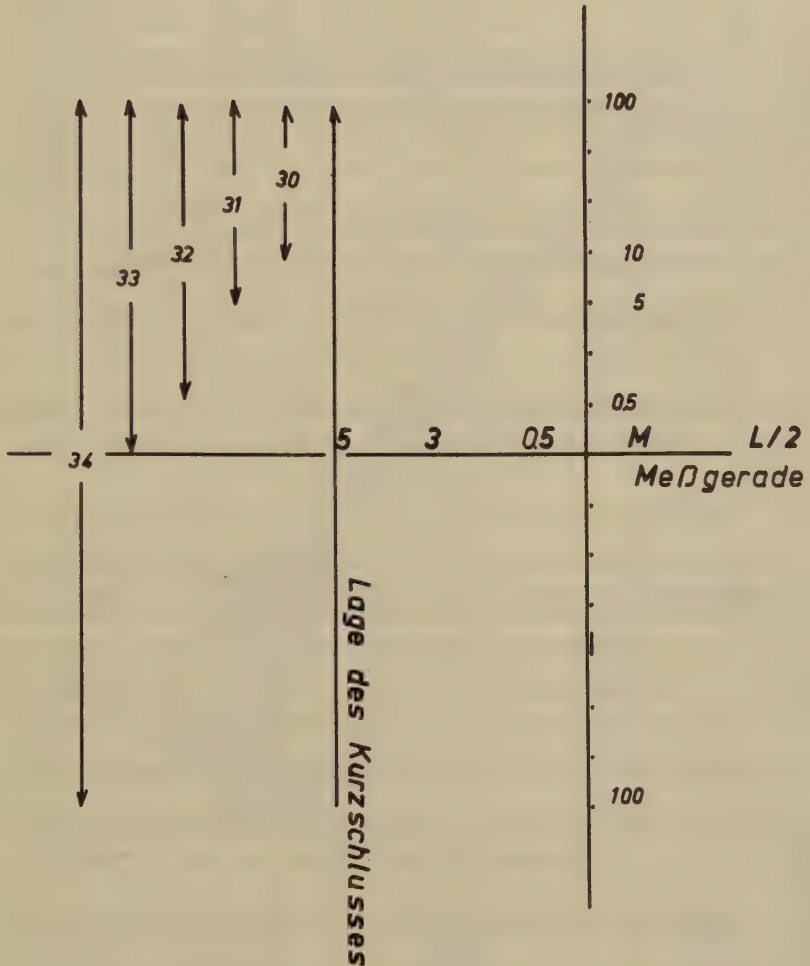


Abb. 23 Die Linien 30 bis 34 geben die Lage der Störleitungen an, die zu den entsprechenden Kurven auf Abb. 24 gehören. Ihr jeweiliger Abstand vom Mittelpunkt beträgt 5 m. Die Störleitungen verlaufen senkrecht zur Meßgeraden.

Abb. 24

 R_s IN SKALENTEILEN

1000

800

500

200

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

15

20

30

40

50

60

100

 $L/2$ in m

28,30

31

32

33

34

Abb. 24 zeigt gestörte Zweischichtkurven.
Die Lage der entsprechenden
Störkörper geht aus Abb. 23 her-
vor.

nachdem die Kurven ihr Minimum erreicht haben, sich einer gemeinsamen Geraden asymptotisch nähern. Das würde bedeuten, daß man diese Kurven nicht mehr als Dreischichtkurven ansehen kann, sondern dahinter vielleicht Vier- oder Mehrschichtstrukturen vermuten müßte, würden wir diese Kurven, wenn wir es könnten, mit den bisher üblichen Methoden auswerten.

Wir fahren fort mit der Analyse gestörter Zweischichtkurven und kommen zu denjenigen Kurven, die durch senkrecht unter einer Potentialsonde verlaufende Kurzschlußverbindungen beeinflußt werden. Eine Zusammenstellung dieser Kurven zeigt die Abbildung 25. Die Symmetrieanordnung der Kurzschlußverbindungen ist in Abbildung 26 eingezeichnet.

Diese Kurvenbilder bringen uns noch einmal etwas Neues, denn sie zeigen nicht den üblichen Parallellauf, sondern ein recht deutliches Divergieren der Kurven zu kleineren Elektrodenabständen $L/2$. Besonders bemerkenswert ist die Kurve 37. Der Kurzschluß bei dieser Kurve wurde so verlegt, daß er einen Knotenpunkt übersprungen hat. Dies würde bedeuten, daß die Rohrleitung, wie es Abbildung 26 zeigt, stückweise isoliert ist und nicht überall direkten Kontakt mit dem sie umgebenden Erdboden hat.

Auch die Kurvengruppe der Abbildung 27 ist recht interessant. Ein Vergleich der Kurve 1 mit der Kurve 49 zeigt, daß beide Kurven keine Unterschiede aufweisen. Das

Abb. 25

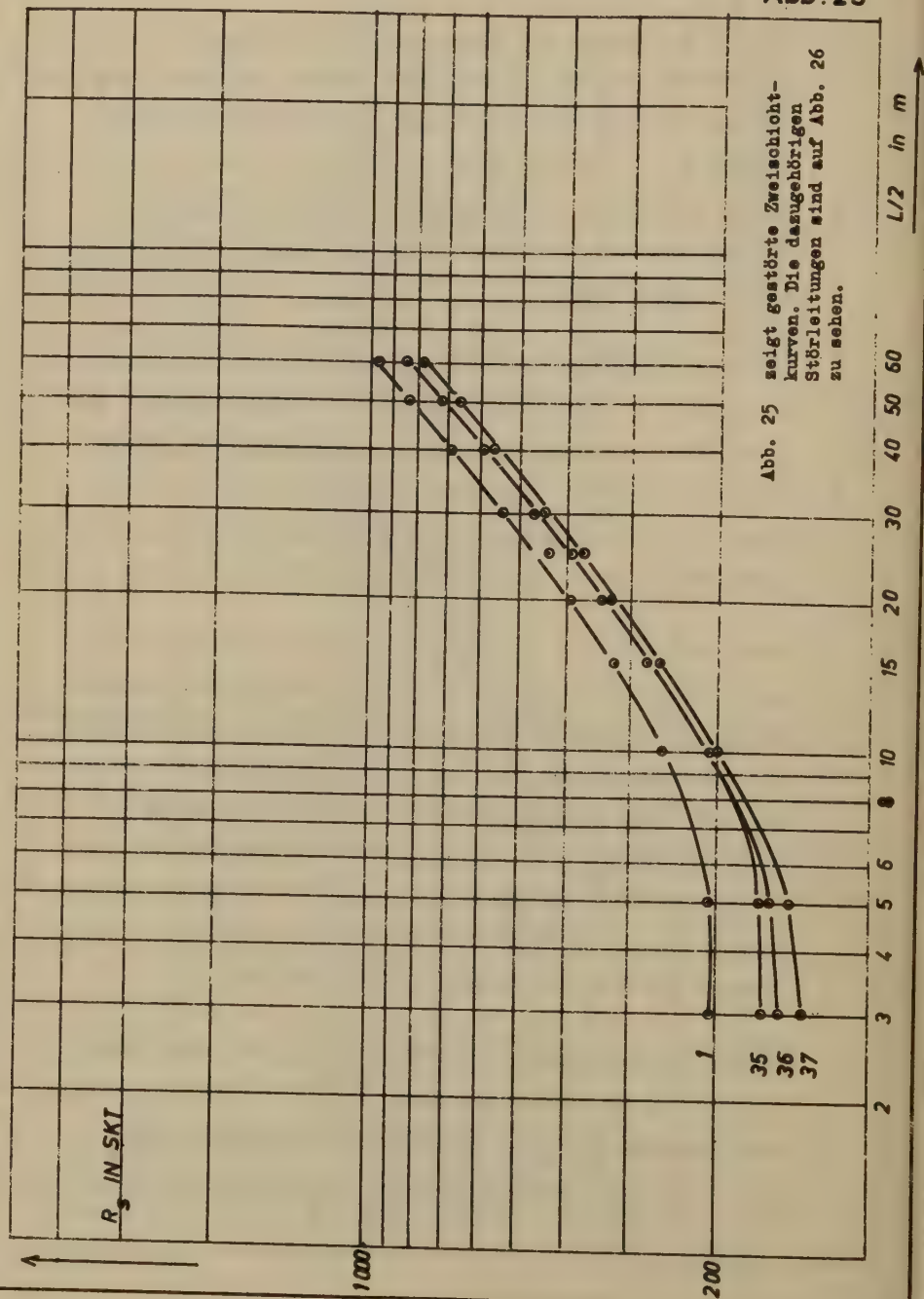


Abb. 25 zeigt gestörte Zweischichtkurven. Die dazugehörigen Störleitungen sind auf Abb. 26 zu sehen.

Abb. 26

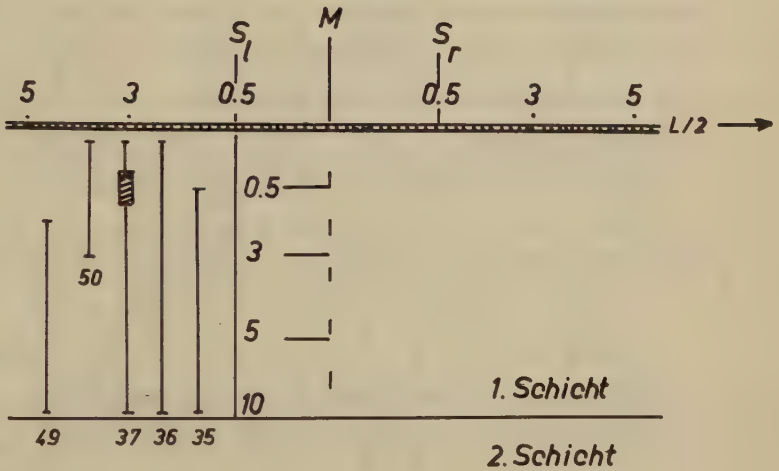


Abb. 26 zeigt die verschiedenen Störleitungen zu den Kurven 35, 36, 37, 49 und 50. Diese Leitungen sind jeweils unter die Potentialsonde S_1 gesetzt zu denken.

Abb. 27

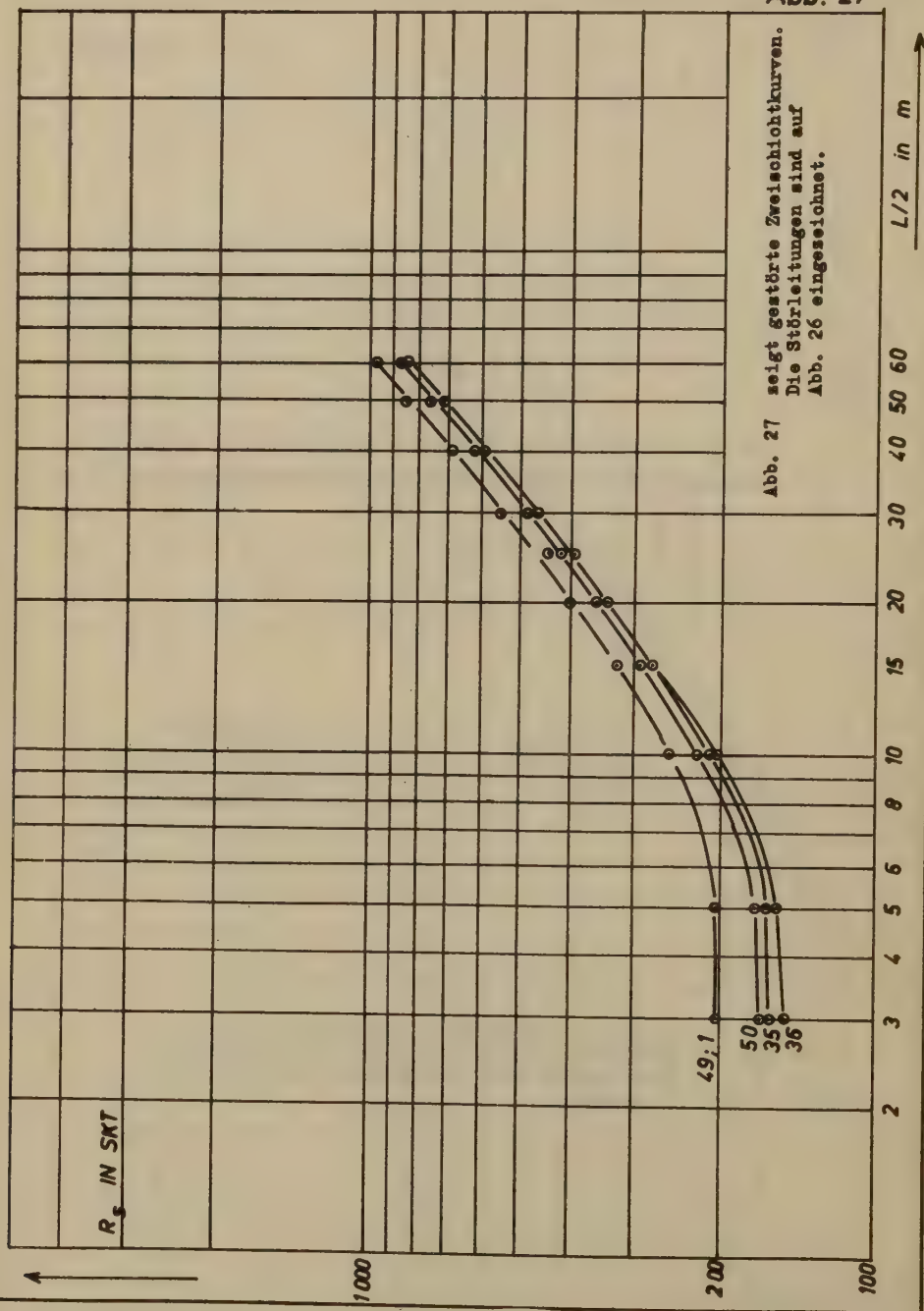


Abb. 27 zeigt gestörte Zweischichtkurven.
Die Störleitungen sind auf
Abb. 26 eingezeichnet.

bedeutet, daß ein Rohr, das 1.5 m unter der Sonde direkt senkrecht im Boden steckt, keinen Einfluß mehr auf das Meßergebnis hat, soweit der Boden homogen, und die Schichtung planparallel ist.

Dies war die große Gruppe der durch Leitungen gestörten idealen Zweischichtanordnungen. In fast jedes der bisher gezeigten Kurvenbilder war die ungestörte Zweischichtkurve eingezeichnet, und ein Vergleich mit all den vielen anderen Kurven hat ergeben, daß nahezu alle Kurven ab $L/2 = 25$ bis 30 m zu der Kurve 1 bzw. 28 parallel verlaufen. Wir können deshalb annehmen, da die Störungen nur wenige Knotenpunkte betreffen, daß wir die gleichen Abweichungen von den Sollwerten H_1 haben, wie wir sie schon bei der Kurve 1 diskutierten. Das berechtigt uns dazu, daß wir eine graphische Korrektur gemäß der Tabelle auf Seite 38 und der Abbildung 10 anbringen können. Wir bekommen damit durchaus für den praktischen Feldgebrauch geeignete Auswertkurven mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 5\%$.

Prüfen wir im nächsten Abschnitt wie sich die uns bereits bekannten Zweischichtkurven verändern, wenn wir statt der linienförmigen Störungen gedrungene Störkörper verschiedener Gestalt in unser Netzwerk einbauen. Wir verwenden hierzu bewußt kleine Störmassen mit nur wenigen Kubikmetern Rauminhalt, so daß man diese auch in der Nähe der Potentialsonden nicht als Analogon zu einer Schichtverteilung auffassen kann, denn wir wissen, daß das Vierpunktverfahren

wie kein anderes Verfahren dazu geeignet ist, Schichten unterschiedlicher elektrischer Leitfähigkeit aufzuzeigen. Wir aber wollen gerade untersuchen, wie sich kleine, eng begrenzte kubische, quaderförmige, trapezoederförmige und keilförmige Störkörper im Kurvenbild einer Widerstands-sondierung bemerkbar machen. Die Formen der Störkörper werden dabei durch den Gitteraufbau des Netzwerkes bestimmt.

Aus der Literatur ist uns zu diesem Problem bekannt, daß man Störkörper, wie wir sie hier in unser Netzwerk einbauen wollen, mit anderen geoelektrischen Verfahren, beispielsweise mit elektromagnetischen Verfahren und auch mit Potentiallinienverfahren, mit großem Vorteil auffindet.

Die Meßergebnisse der geoelektrischen Vierpunktverfahren dagegen, so liest man es zum Beispiel in einigen Lehrbüchern, sollten durch vereinzelt auftretende, gedrungene Störkörper nicht wesentlich beeinflußt werden. Soweit sie überhaupt in den Meßkurven bemerkt werden, ist es nach Hummel¹⁾ sehr schwierig, daraus Schlüsse auf Form und Lage der Störkörper zu ziehen. Daraus geht hervor, daß die Vierpunktverfahren im allgemeinen ungeeignet sind, kleinere Inhomogenitäten aufzufinden. Umgekehrt bedeutet dies, daß eben diese kleinen Inhomogenitäten eine normale Schlumberger-Messung nur geringfügig beeinträchtigen. Nach Deppermann¹⁰⁾ überlagern sich diese oberflächlichen Störungen nur dann den Tiefeneffekten, wenn sie das

Potential in unmittelbarer Nähe der Potentialsonden verzerren. Wir werden deshalb die betreffenden Störkörper in der Nähe des Mittelpunktes unseres Netzwerkes einbauen.

Die Lage und die Form der Störkörper sind in den folgenden drei Abbildungen 28, 29 und 30 zu sehen. Dabei sind die Störkörper II und III der Abbildung 28 nacheinander in das Netzwerk eingebaut zu denken. Ihre Lage ist durch die Mittelpunktsachse und die Zahlenangaben kenntlich gemacht. Bei jeder Messung ist stets nur ein einziger Störkörper im Netzwerk vorhanden. Das gleiche gilt auch für die Abbildung 29. Jeder der Störkörper V, VI, VII, VIII kann den Störkörper IV ersetzen, und zwar so, daß die Oberflächen der Störkörper jeweils in der gleichen Lage bleiben. Die vier Körper V bis VIII stellen Keile dar, die durch entsprechende Halbierungen aus dem Körper IV hervorgegangen sind.

Die römischen Zahlen an den einzelnen Störkörpern der nachstehenden Tabelle entsprechen den Zahlen an den Meßreihen. Diese Zusammenstellung ist deshalb notwendig, weil die Meßwerte sehr wenig differieren und es deshalb schwer wäre, aus so gedrängt gezeichneten Kurven Unterschiede herauszulesen.

Z	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
157	165	161	157	155	147	147	158	144	160
161	161	152	156	154	156	154	154	155	166
195	198	197	191	183	191	185	184	186	188
252	252		234	235	245	235	237	240	238
311	310	310	287	282	296	284	291	291	291
358	353		344	325	345			337	333
425	424		405	388	412				393
542			525	497		497			506
650			633						
730	720	718	712	672	718		678	686	672
915									

Die mit Z bezeichnete Meßreihe gehört zu der entsprechenden Zweischichtkurve. Sie läßt sich mit den Kurven 1 und 28 zur Deckung bringen, wie es die Verhältniszahlen in der folgenden Tabelle zeigen. Die Verschiebung der Z-Kurve gegenüber den Kurven 1 und 28 ist auf eine Veränderung des äußeren Widerstandes des Spiegelgalvanometers zurückzuführen.

L/2	Kurve Z	Kurve 28	Verhältnis 28 : Z
3	157	4 120	26.2
5	161	4 010	25.0
10	195	4 940	25.3
15	252	6 260	24.8
20	311	7 780	24.9
25	358	8 880	24.8
30	425	10 520	24.8
40	542	13 400	24.8
50	650	16 200	24.9
60	730	18 900	25.8
100	915	23 000	25.2

Abb. 28

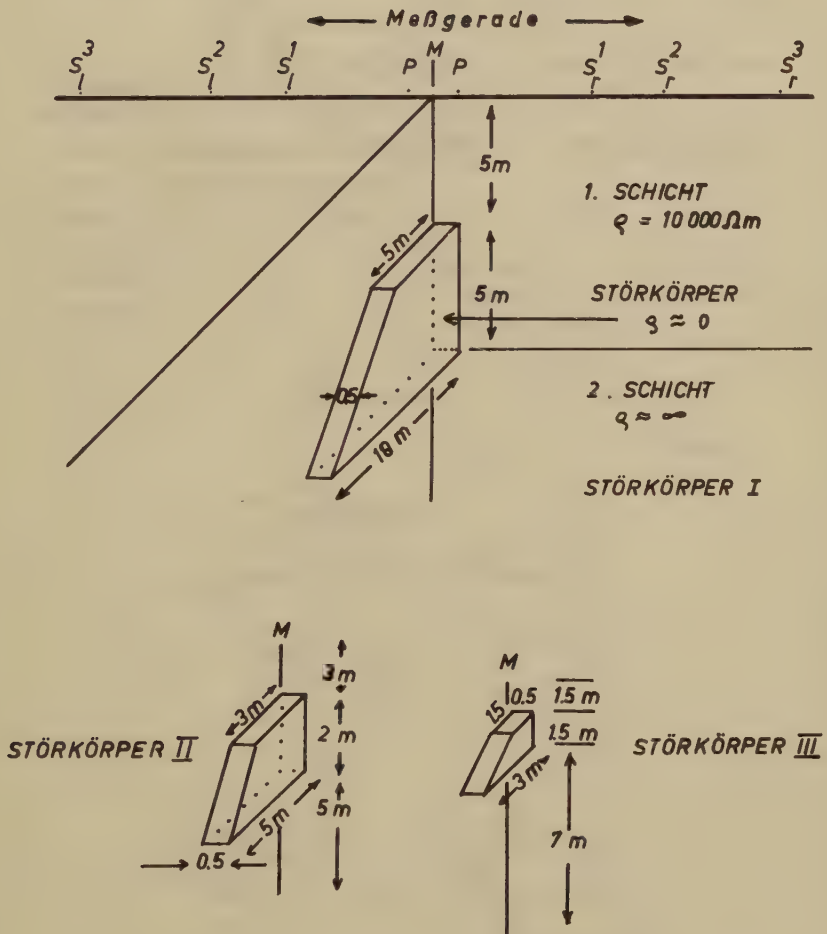


Abb. 28 zeigt drei trapezoederförmige Störkörper (I, II, III).

Abb. 29

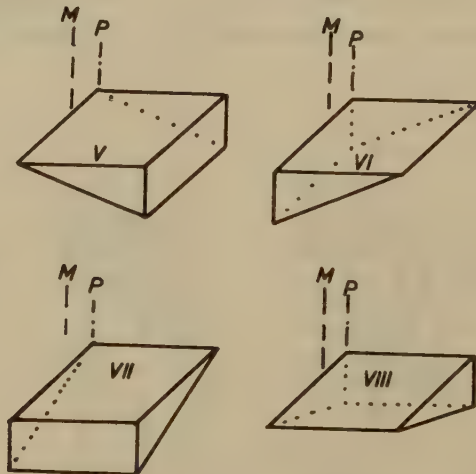
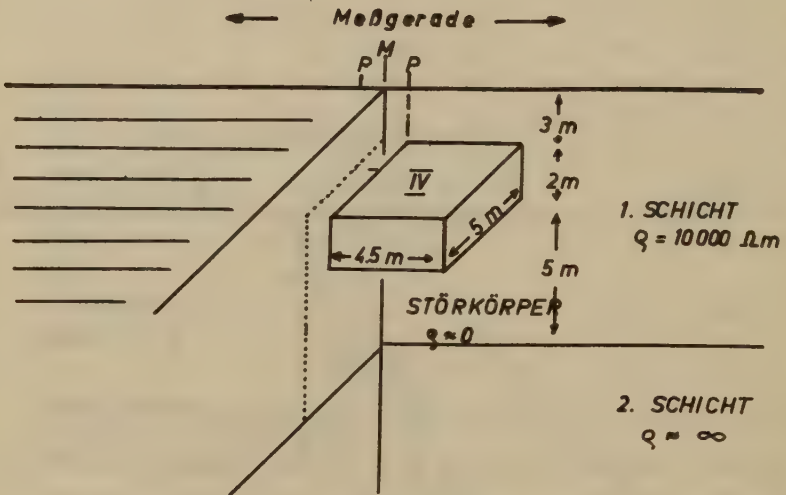


Abb. 29 zeigt die Störkörper IV bis VIII.

Abb. 30

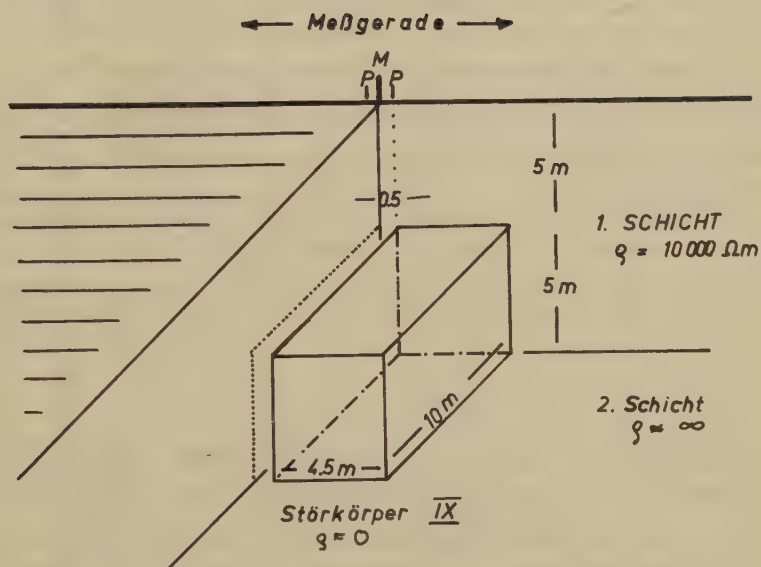
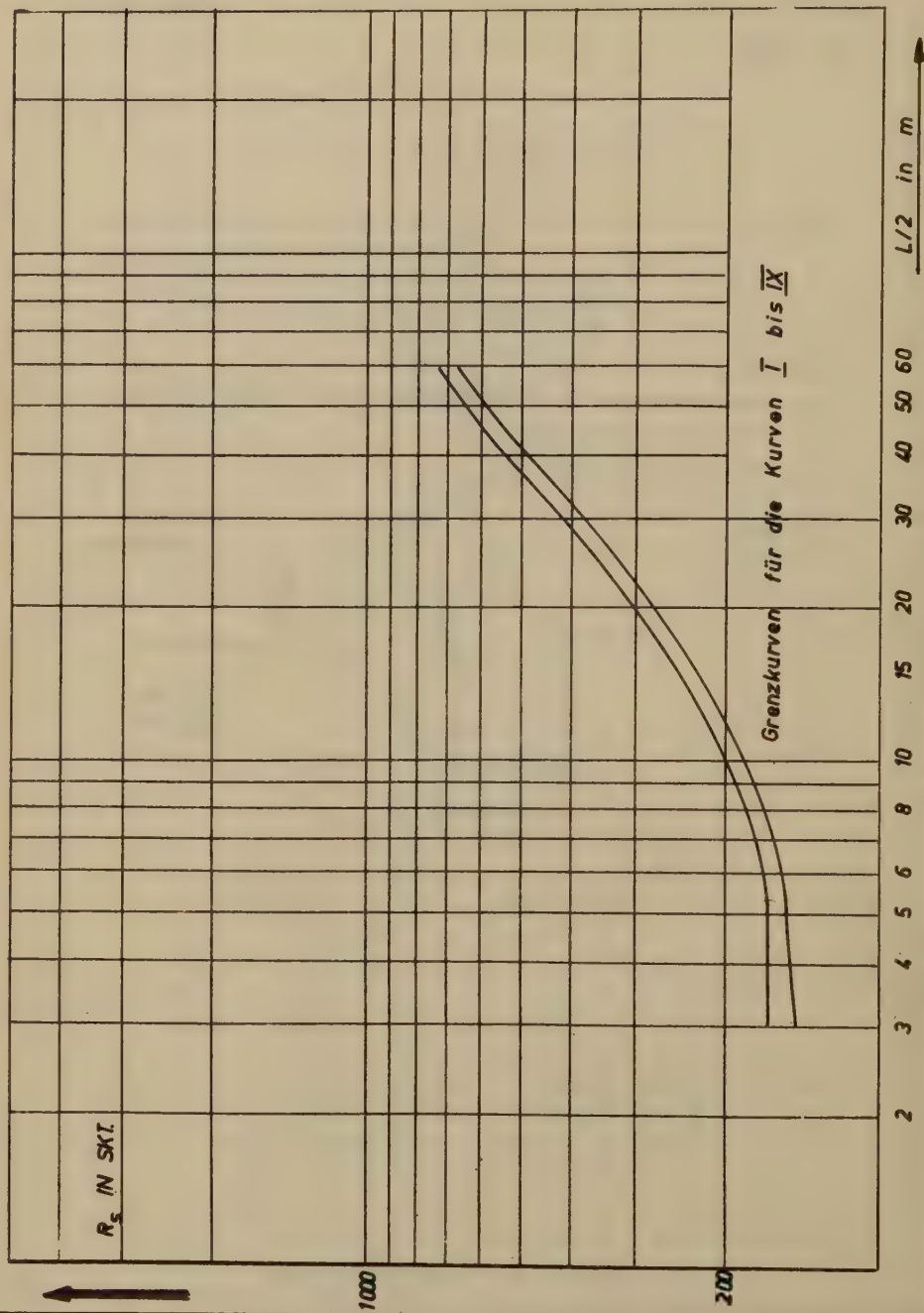


Abb. 31



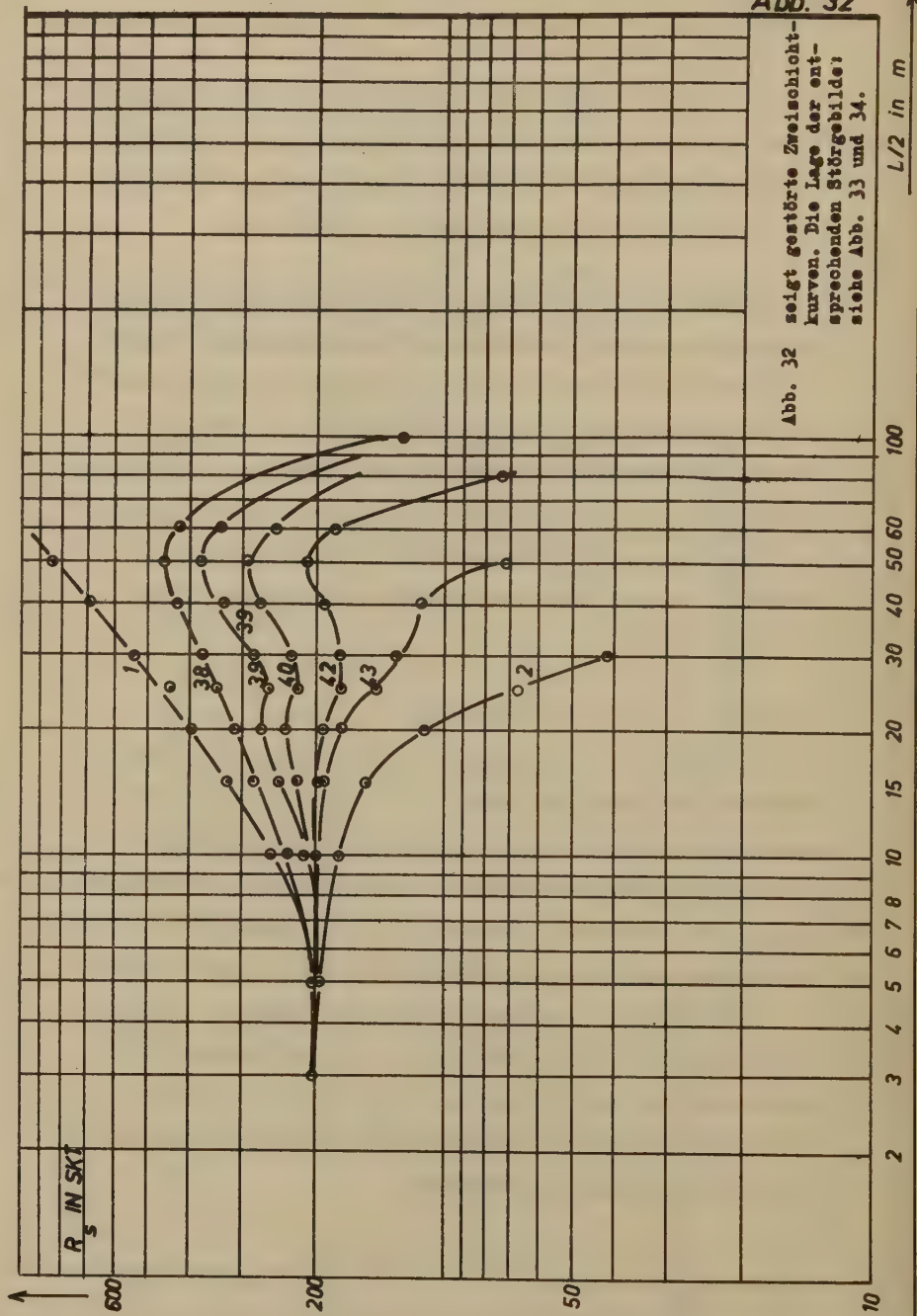
Auf Abbildung 31 sind - statt der einzelnen Kurven der Meßreihen I bis IX - die obere und untere Begrenzungskurve eingezeichnet. Zwischen diesen beiden Grenzkurven liegen alle anderen Werte der oben genannten Meßreihen.

Die Ergebnisse dieser Versuche entsprechen ganz unseren Erwartungen. Kleine, gedrungene Störkörper beeinflussen die Zweischichtkurven, solange sie vereinzelt auftreten, nur geringfügig und sind deshalb bei der Auswertung geoelektrischer Widerstandssondierungen nur entsprechend undeutlich zu erkennen. Lediglich kleinere Verschiebungen des spezifischen Widerstandes der Deckschicht sind zu bemerken. Dagegen sind Schichtgrenzenänderungen nicht nachzuweisen.

Auch der Versuch, die Störkörper IV bis VIII in den Zwischenkurven der Abbildung 31 nach Gestalt und Lage zu erkennen, ist insofern positiv zu bewerten, daß er bereits Bekanntes bestätigt. Es ist tatsächlich nicht möglich, aus den geringen Abweichungen der Kurvenwerte spezifische Merkmale zu erkennen, die eine Klassifizierung der Störkörper rechtfertigen würden. Mit einer Lokalisierung kleiner Störkörper und deren Gestaltsbestimmung ist das Schlumberger-Verfahren überfordert. Diese Tatsache trägt andererseits zu den großen Erfolgen des Schlumberger-Verfahrens bei, wenn es darum geht, horizontal liegende Schichtverteilungen zu vermessen.

Abb. 32

Abb. 32 zeigt gestörte Zweischichtkurven. Die Lage der entsprechenden Störgebilde; siehe Abb. 33 und 34.



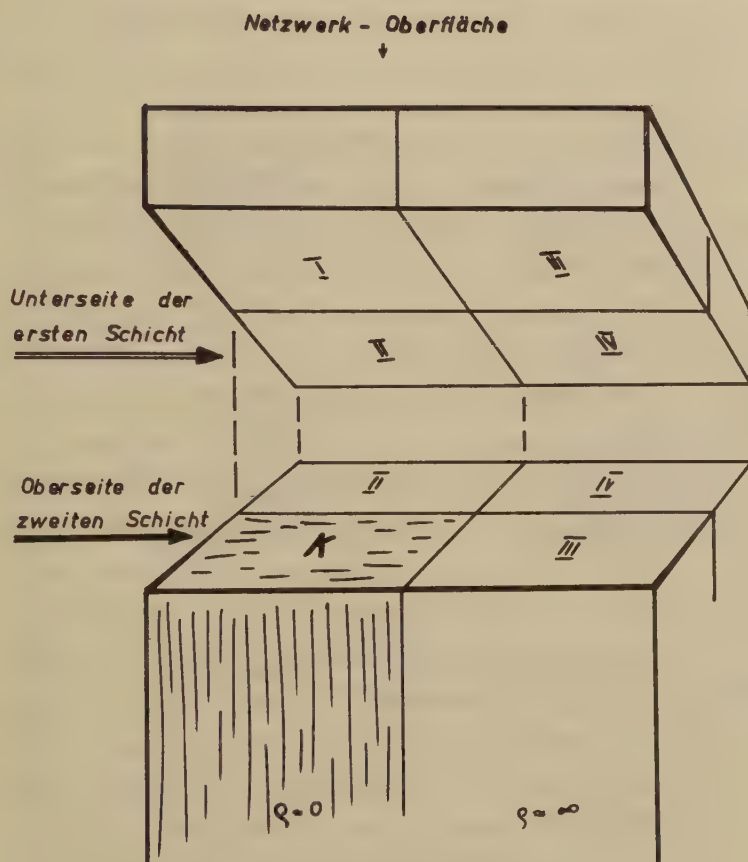
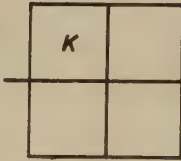


Abb. 33 zeigt schematisch das aufgeklappte Netzwerk. Die Zahlen I bis IV deuten die Quadranten an. K bezeichnet einen sehr gut leitenden Quadranten in der zweiten Schicht.

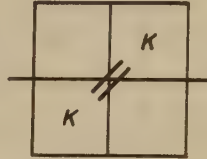
Abb. 34

38



Meßgerätee

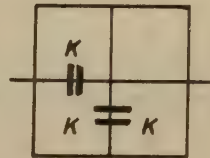
39



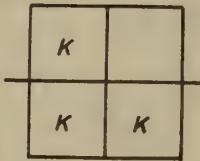
40



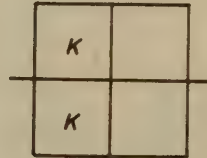
42



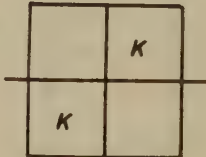
43



44



45



46

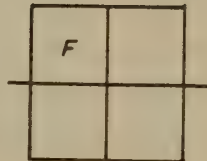


Abb. 34 Die Quadrate 38 bis 45 zeigen schematisch die Oberseite der zweiten Schicht. Das Quadrat 46 dagegen zeigt die Oberseite der ersten Schicht.

Mit dem Störkörper IX der Abbildung 30 haben wir eine größere Inhomogenität in unmittelbarer Nähe der Potentialsonden ins Netzwerk eingebaut. Sein Volumen beträgt 225 m^3 . Trotzdem ist auch hier die feldverzerrende Wirkung auf die Potentialsonden gering, wie es die Meßreihe IX auf Seite 63 bestätigt.

Inhomogenitäten machen sich demzufolge bei diesem Vierpunktverfahren erst dann deutlich bemerkbar, wenn sie flächenhaft verteilt sind. Wir werden deshalb im folgenden großräumige Störungen der Schichtverteilung untersuchen. Betrachten wir dazu die Kurven der Abbildung 32. Die flächenhaften Störungen werden dadurch verifiziert, daß die Verbindungen zur zweiten Schicht einmal kurzgeschlossen werden oder aber offen bleiben. Dadurch werden Zonen sehr hoher Leitfähigkeit neben Zonen sehr hoher spezifischer Widerstände geschaffen. Die Anordnung dieser Zonen verschiedener Leitfähigkeiten in der zweiten Schicht wird auf den Abbildungen 33 und 34 gezeigt. Auf Abbildung 33 ist schematisch das aufgeklappte Netzwerk mit der quadrantenartigen Aufteilung der Schichten zu sehen. Ist einer der Quadranten mit K bezeichnet, so bedeutet dies, daß er eine Zone sehr guter Leitfähigkeit darstellt. Die unbezeichneten Quadranten der zweiten Schicht haben dagegen einen sehr hohen spezifischen Widerstand ($\varrho \approx \infty$). Der Einfachheit halber zeichnen wir in der folgenden Abbildung 34 nur noch die Oberseite der zweiten Schicht als Quadrat und markieren darin die

Eigenschaften der Quadranten. Die erste Schicht bleibt bei all diesen Versuchen mit einer Ausnahme unverändert. Bei Versuch 46 dieser Reihe ist keiner der Quadranten der zweiten Schicht kurzgeschlossen. Dafür wurde aber ein Quadrant aus der ersten Schicht herausgenommen. An seine Stelle ist dadurch ein Gebiet mit sehr hohem spezifischen Widerstand getreten. ($\rho \sim \infty$) (Kennzeichnung F)

Ist, wie die Kurve 38 uns zeigt, ein Quadrant zur zweiten Schicht kurzgeschlossen, während die anderen drei Quadranten ein unendlich schlecht leitendes Substratum haben, so wird die ungestörte Zweischichtkurve in ein dreischichtähnliches Gebilde verwandelt. Wir schließen einen zweiten Quadranten in der oben erwähnten Weise kurz und ordnen ihn so an, daß sich die beiden kurzgeschlossenen und untereinander verbundenen Quadranten diagonal gegenüberliegen. Dies drückt sich in der Widerstandskurve in einer weiteren Gestaltsänderung zur vorhergehenden Kurve aus. Die Kurve 39, wie auch die nächsten drei Kurven 40, 42 und 43, hat zwei Maxima bekommen, davon ein relatives. Sie ist nicht mehr als Drei- sondern als Mehrschichtkurve anzusehen. Für die Auswertpraxis bedeutet dies, daß sehr unterschiedliche Leitfähigkeiten in der zweiten Schicht eine Mehrschichtstruktur mit imaginären Leitfähigkeiten und Mächtigkeiten vortäuschen. Eine richtige, oder gar nur annähernd richtige Auswertung mit bereits vorhandenen Schlumberger-Kurven ist in keinem Fall möglich.

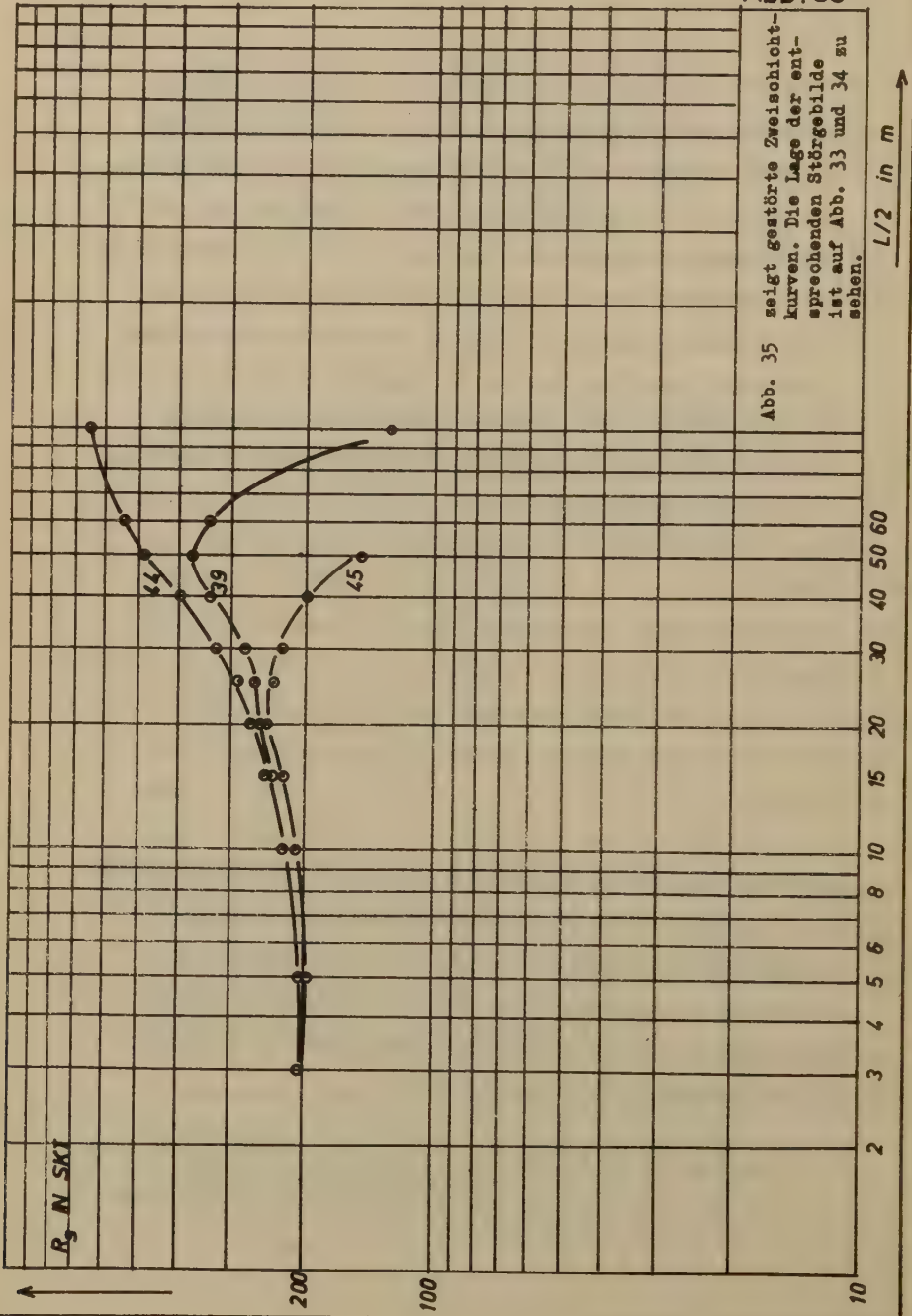
Liegen die beiden kurzgeschlossenen Quadranten nicht mehr diagonal zueinander, sondern in Richtung der Meßgeraden nebeneinander, so bekommen wir bei einer Messung die Kurve 40. Eigentlich sind das zwei Kurven, die deckungsgleich sind, denn es zeigt sich kein Unterschied in der Kurvengestalt, wenn wir mit verbundenen oder unverbundenen kurzgeschlossenen Quadranten messen. Dies ist nicht immer so, wie es die nächste Anordnung beweist. Wir schließen einen weiteren Quadranten zur zweiten Schicht kurz und verbinden die Kurzschlüsse untereinander und messen so die Kurve 42. Bestehen diese zusätzlichen Verbindungen nicht, so bekommen wir Kurve 43.

In die Geologie übertragen bedeutet es, daß sich eine Spalte in einem gut leitenden Boden, ausgefüllt mit einem Isolator, bei stark unterschiedlichen Leitfähigkeiten in der zweiten Schicht durchaus geoelektrisch feststellen läßt.

Kurve 2 ist schon bei der Fehlerkritik besprochen worden. Bei dieser Kurve, die hier nur wegen des Zusammenhangs noch einmal erwähnt wird, ist kein Unterschied in der Kurvenform festzustellen, gleichgültig ob die Kurzschlüsse der einzelnen Quadranten verbunden sind, oder ob diese Verbindungen unterbrochen bleiben.

Ein ähnliches Bild, wie wir es von der Abbildung 32 kennen, zeigt uns Abbildung 35. Zu der eben besprochenen Kurve 39

Abb. 35



sind die Kurven 44 und 45 hinzugezeichnet. Die geometrische Anordnung ist schematisch auf Abbildung 34 dargestellt.

Die Kurve 44 bekommt man, wenn die beiden zur zweiten Schicht kurzgeschlossenen Würfel senkrecht zur Meßrichtung angeordnet sind. Auch hier ist es gleichgültig, ob die Kurzschlüsse der zweiten Schicht verbunden sind oder nicht.

Ordnet man die beiden Quadranten diagonal an, so bekommen wir die bereits besprochene Kurve 39. Unterbricht man diese zusätzliche Kurzschlußverbindung, so geht die Kurve 39 in die Kurve 45 über. Auch diese Kurven sind mit den bisher vorhandenen Auswertunterlagen nicht zu deuten.

In der Natur könnten solche Widerstandsverteilungen beispielsweise bei Erzvorkommen angetroffen werden, durch die Verwerfungszonen hindurchgehen.

Untersuchen wir, bei welchen Anordnungen die zur zweiten Schicht kurzgeschlossenen Quadranten bei gleicher Konfiguration verschiedene Meßkurven liefern. Je nach dem, ob die entsprechenden Kurzschlußschienen untereinander verbunden sind oder nicht, stellen wir fest, daß dieser Effekt nur dann auftritt, wenn sich zwei Quadranten K mit gleicher und sehr guter Leitfähigkeit der zweiten Schicht diagonal gegenüberliegen. Das bedeutet, daß in Richtung des Stromflusses am Mittelpunkt nur eine Berührungsstelle vorhanden ist, und ein großer Teil des Stromes nicht den

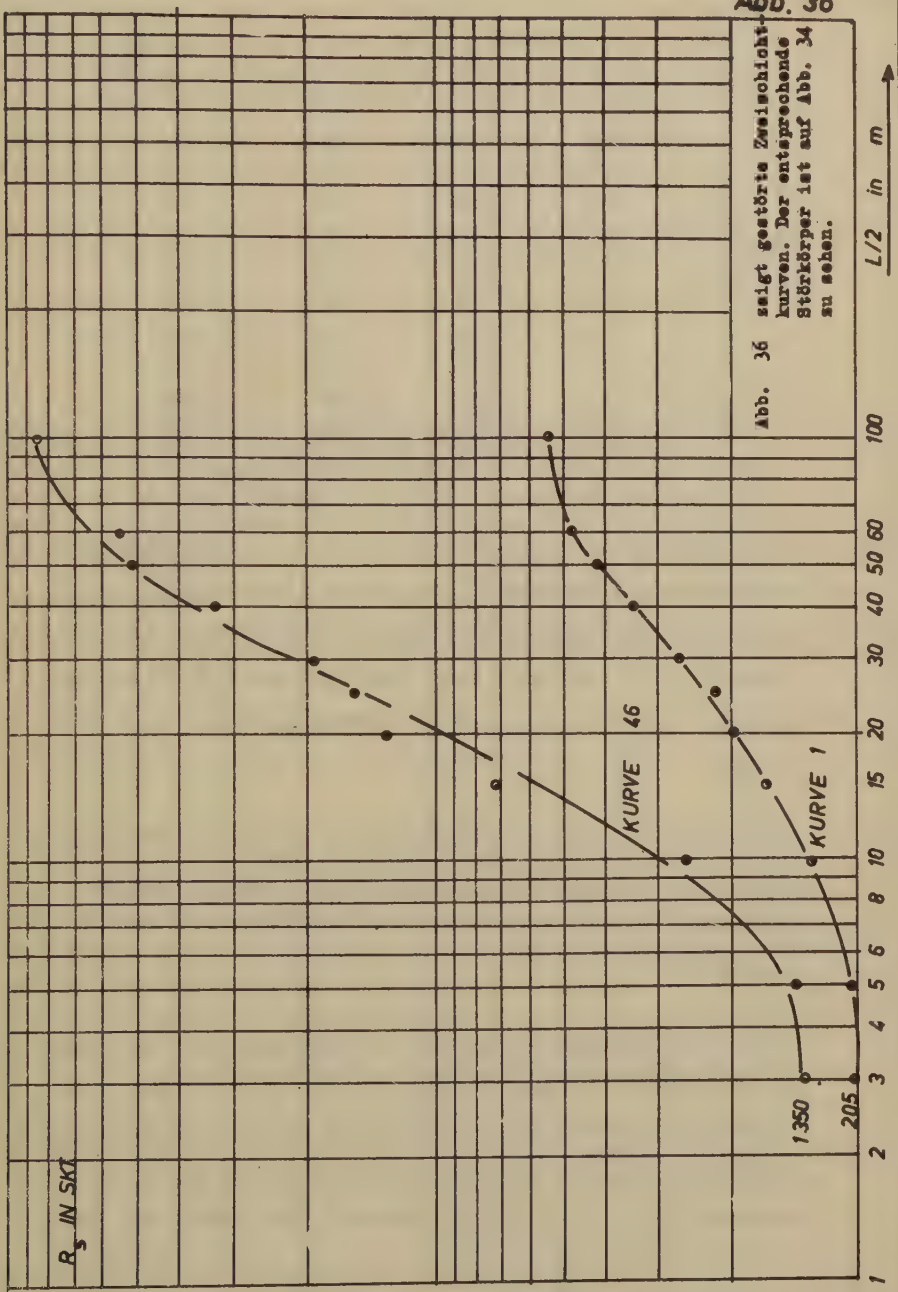
bequemen Weg über die Kurzschlüsse nehmen kann, sondern den wesentlich unbequemeren Weg über das Netzwerk benutzen muß. Ein zusätzlicher Kurzschluß zwischen den Kurzschlußschienen bedeutet eine merkliche Überbrückung der Netzwerkwiderstände. Dies drückt sich deutlich in einer Senkung des scheinbaren spezifischen Widerstandes aus.

Lassen wir einen Quadranten in der ersten Schicht ausfallen, so liefert uns das Netzwerk die Kurve 46. (Abb. 36) Wir sehen, daß der spezifische Widerstand im Vergleich zur ungestörten Zweischichtkurve 1 von ca. 200 Einheiten auf etwa 1 300 Einheiten angestiegen ist. Vor allem aber fällt die sehr steile Neigung der Kurve auf, wobei es dahingestellt sein mag, ob man bei einer derartigen Streuung der Meßpunkte diese verbinden darf. Diese Kurve zeigt, daß besonders angeordnete Inhomogenitäten in der Deckschicht eine Änderung der Neigung bedingen können.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei noch von einer Messung berichtet, bei der Sonden und Elektroden vertauscht worden sind. Dabei ist einer der Quadranten zur zweiten Schicht hin kurzgeschlossen worden, während an den anderen drei Würfeln keine Änderungen vorgenommen wurden. Die Messungen werden zunächst mit entsprechenden Vergleichswerten in der folgenden Tabelle zusammengestellt, damit die feineren Unterschiede deutlicher sichtbar werden. Die Werte sind in Skalenteilen angegeben.

Abb. 36

Abb. 36 zeigt gestörte Zwischlichtkurven. Der entsprechende Störkörper ist auf Abb. 34 zu sehen.



L/2	Kurve 47	Kurve 38 ₁	Kurve 38 ₂	Kurve 48
3	205	205	205	210
5	201	202	201	201
10	234	236	234	234
15	280	280	281	275
20	324	312	310	311
25	349	336	341	329
30	380	374	374	357
40	442	422	428	405
50	455	455	463	401
60	395	408	420	363
100	94 ?	94 ?	126 ?	62 ?

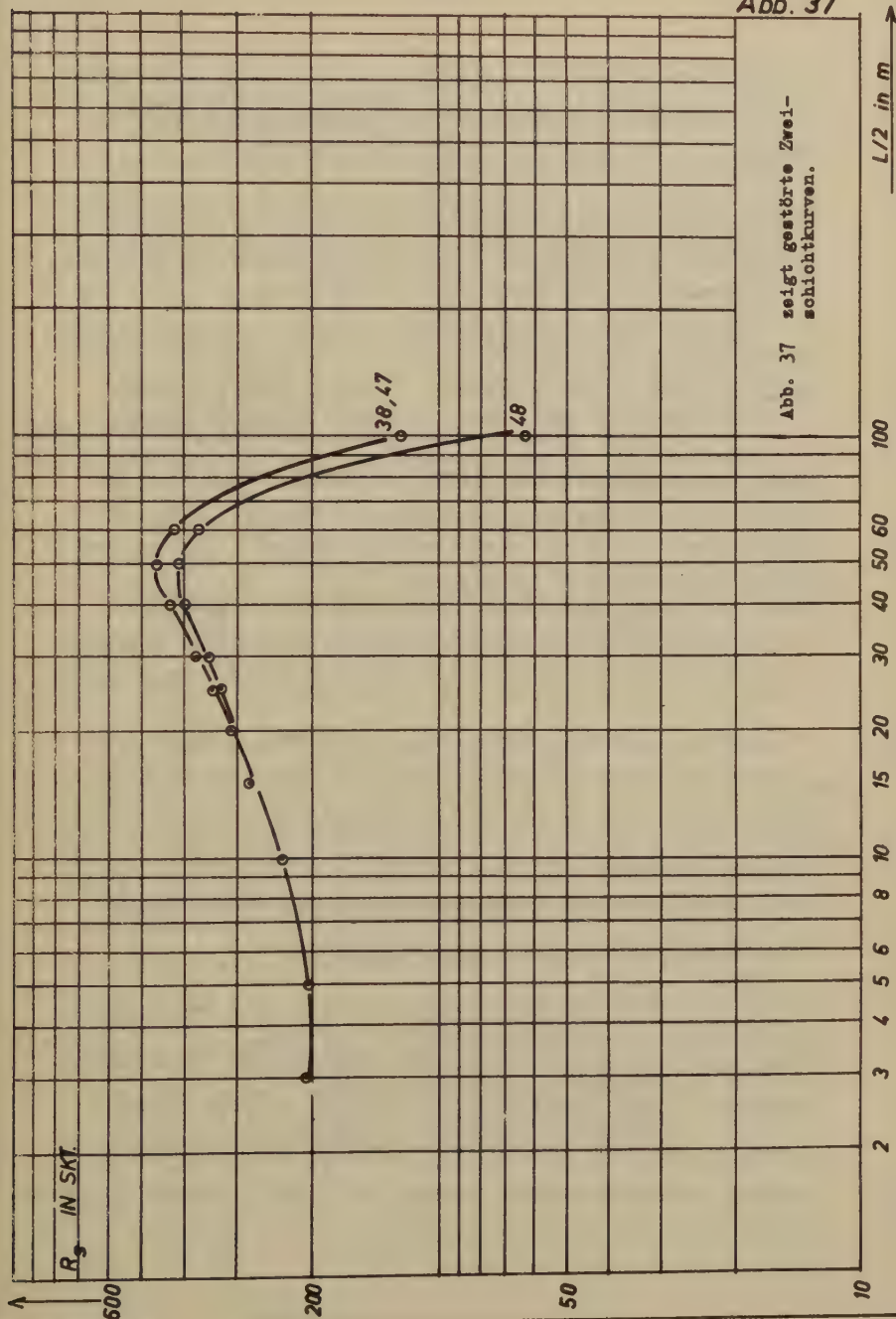
Die Abweichungen der Werte der Kurve 47 von den Durchschnittswerten der Kurven 38₁ und 38₂ sind dadurch zu erklären, daß die Messungen wegen einer teilweisen Überlastung der Widerstände sehr schnell durchgeführt werden mußten, und deshalb kleine Ablesefehler vorgekommen sein können.

Wir sehen, daß - wie es Schlumberger schon früher bewiesen hat - eine Vertauschung von Potentialsonden und Stromelektroden keinen Einfluß auf die Kurvengestalt ausübt.
(Kurve 47)

Die auf Abbildung 37 ebenfalls zu sehende Kurve 48 weicht von den Kurven 38 und 47 etwas ab. Die Ursache für diese Differenz zwischen den beiden Kurven ist eine Kurzschlußverbindung, die alle Knotenpunkte unterhalb des Mittelpunktes bis zu 10 m Tiefe verbindet. Wir sehen, daß das

Abb. 37

Abb. 37 zeigt gestörte Zweischichtkurven.



Feld in diesem Fall nicht mehr symmetrisch zum Mittelpunkt ist, wie es nicht anders zu erwarten war.

Ein Ergebnis dieser Arbeit ist, daß elektrische Potentialkurven geschichteter Erdböden durchaus nicht eindeutig zu sein brauchen, sobald diese Erdböden nicht den Hummel sehen und Stefanescu sehen Bedingungen entsprechen, wenn sie also nicht horizontal, planparallel, homogen und isotrop sind. Dadurch wird die Auswertung geoelektrischer Widerstandssondierungen erheblich erschwert, sofern man keine zusätzlichen Anhaltspunkte aus der Geologie des Gebietes bekommen kann, und sofern keinerlei Anhaltspunkte über eventuell vorhandene künstliche Störgebilde, wie beispielsweise metallische Leitungen, vorliegen. Man müßte deshalb an jedem Meßpunkt mit einem zweiten geoelektrischen Verfahren klären, ob besondere Bedingungen gegeben sind, ob also die nähere Umgebung frei von elektrischen Störkörpern ist, und ob man das Schlumberger-Verfahren anwenden darf. Für einige dieser in der Natur vorkommenden Gegebenheiten sollen diese Überlegungen und die dazugehörigen Kurven eine kleine Hilfe zur Auswertung sein.

Wir haben gesehen, daß die Analogie zwischen dem Widerstandsnetzwerk und dem Erdboden sehr eng ist, denn beiden Systemen liegen nicht nur die gleichen mathematischen Gesetze zugrunde, sondern sie arbeiten auch mit demselben Medium, dem elektrischen Strom, der sich in beiden Systemen dreidimensional ausbreiten kann.

Damit aber haben wir die Möglichkeit, wenigstens für die Gleichstromgeoelektrik, die Auswertkurven durch Experimente zu gewinnen. Wir können mit der Geoelektrik ins Labor gehen und die Versuchsbedingungen unseren Wünschen unterwerfen, so wie es nur selten in der Geophysik vorkommt. Wir haben die Möglichkeit, mit einem vervollkommeneten Netzwerk jede beliebige Leitfähigkeit, isotrop oder anisotrop, einzubauen, wir können die Leitfähigkeit kontinuierlich zu- und abnehmen lassen und jede beliebige Schichtneigung verifizieren, wir können Vielschichtprobleme genauso lösen wie ein Zweischichtproblem; wir haben Gelegenheit, einzelne Meßverfahren direkt zu prüfen und zu vergleichen, kurzum, wir haben hier einen Modellrechner, der - entsprechend gebaut - allen Anforderungen der Gleichstrom- und Niederfrequenz-Geoelektrik gerecht wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß diese Methode, Näherungslösungen für die Laplace'sche Differentialgleichung beim Vorhandensein komplizierter Grenzbedingungen mittels eines Widerstandsnetzwerkes anzugeben, sehr erfolgversprechend ist. Die Schwierigkeiten, die mit dem Aufbau eines wesentlich größeren Modellrechners verbunden sind, sind nicht mehr grundsätzlicher Art, sondern rein technischer Natur. Der Aufstellung eines umfangreichen Kurvenkatalogs geoelektrischer Auswertkurven würden damit keine mathematischen Schwierigkeiten mehr im Wege stehen.

Wir wollen, wie bereits angekündigt, an dieser Stelle kurz die Fehler betrachten, die durch die Abweichungen der Widerstände von ihren Sollwerten entstehen.

Vorgegeben ist ein Netzwerk, das in der x-Richtung A, in der y-Richtung B und in der z-Richtung C Widerstände habe. (Abb. 7a) Alle Widerstände haben exakt ihren Sollwert und sind untereinander gleich groß. Wir legen nun eine Spannung V in der x-Richtung an, so daß wir von Knotenpunkt zu Knotenpunkt in der x-Richtung ein Spannungsgefälle

$$\Delta V = \frac{V}{A} \quad (A \ 1)$$

haben, während alle Punkte entlang der Linien gleicher x-Werte dasselbe Potential haben. (Abb. 7b) (In dieser Abbildung ist das Spannungsgefälle in y-Richtung eingezeichnet.)

Nehmen wir nun an, daß ein Widerstand zwischen den Punkten P_P und P_O um δR vom Sollwert R abweicht (Abb. 38),

$$\text{also } R + \delta R = R (1 + \eta) \quad \text{mit } \eta = \frac{\delta R}{R} \quad \text{ist.}$$

Die Spannung zwischen den Punkten P_O und P_Q ändert sich durch diese Störung nur geringfügig und kann in erster Näherung vernachlässigt werden. Anders ist dies bei der Spannung zwischen den Punkten P_O und P_P . Hier wächst die Differenz auf $\Delta V + \delta V$ an. Dies bedeutet natürlich auch eine Änderung der Potentialdifferenzen zwischen den Punkten P_O und P_T , P_O und P_U , P_O und P_S sowie P_O und P_R .

Diese Differenzen G werden etwas kleiner sein als $\mathcal{V}$. Sie hängen von der Lage des Punktes P_0 innerhalb des Netzwerkes ab. Wir übernehmen im folgenden den von Liebmann⁷⁾ errechneten Wert für G : $G = 3/4 \mathcal{V}$. Das ist deshalb möglich, da beide Netzwerke sehr ähnlich aufgebaut sind.

Die in den sechs Zweigen fließenden Ströme sind dann:

$$I_P \approx \frac{\Delta V + \mathcal{V}}{R + \mathcal{R}} ; \quad I_Q \approx - \frac{\Delta V}{R}$$

$$I_R = I_S = I_T = I_U \approx \frac{G}{R}$$

Nach dem Kirchhoff schen Satz (40) bekommen wir:

$$\left(\frac{\Delta V + \mathcal{V}}{R} \right) \left(\frac{1}{1 + \eta} \right) + \frac{4G}{R} - \frac{\Delta V}{R} = 0$$

Für G setzen wir den Liebmann schen Wert ein:

$$(\Delta V + \mathcal{V}) (1 - \eta) + 4 \cdot 3/4 \mathcal{V} - \Delta V = 0$$

$$\Delta V + \mathcal{V} - \eta \Delta V - \eta \mathcal{V} + 3 \mathcal{V} - \Delta V = 0$$

Da η und $\mathcal{V}$ beide sehr klein sind, folgt:

$$\begin{aligned} 4 \mathcal{V} &= \eta \Delta V \\ \mathcal{V} &= \frac{\eta}{4} \Delta V \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (A 1):

$$\frac{\mathcal{V}}{V} = \frac{\eta}{4A}$$

Dieses Ergebnis kann leicht für den Fall, daß alle drei

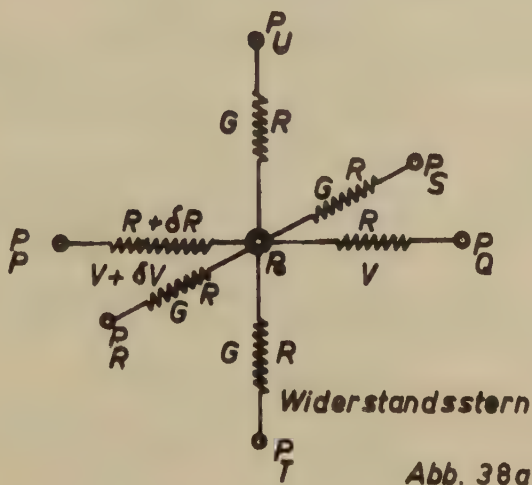
Potentialgradienten vorhanden sind, erweitert werden. Im weiteren Verlauf der Rechnung ergibt sich dann ein Wert für den durchschnittlichen relativen Fehler von $\frac{\sqrt{V}}{V}$, der auf das ganze Netzwerk bezogen ist:

$$W\left(\frac{\sqrt{V}}{V}\right) = \frac{1}{2} w\left(\frac{\sqrt{R}}{R}\right) \left\{ (h/a)^2 + (h/b)^2 + (h/c)^2 \right\}^{1/2}$$

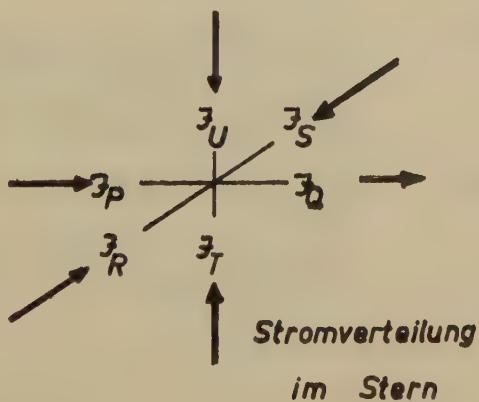
(a, b und c geben die Anzahl der Maschen in x-, y- und z-Richtung an)

Bei dieser Ableitung ist berücksichtigt worden, daß der Strom dem Netzwerk über Flächenelektroden zugeführt wird, und daß die Maschenweite h für alle Richtungen gleich bleibt. Diese eben angeführte Gleichung ist eine sehr stark vereinfachte Gleichung, die in Anlehnung an die Liebmann'sche Arbeit⁷⁾ aufgestellt worden ist. Sie hat für unser Netzwerk keine praktische Bedeutung, denn dieses Netzwerk hat keinen konstant bleibenden Gitterabstand h. Die Stromzuführung erfolgt zudem über punktförmige Elektroden, die sich außerdem noch nicht einmal auf gegenüberliegenden Seiten befinden, sondern den Strom entlang der Meßgeraden an der Oberfläche des Netzwerkes einspeisen.

Liebmann konnte mit einem speziell zur Überprüfung dieser Gleichung für den zweidimensionalen Fall aufgebauten Netzwerk nachweisen, daß die durchschnittlichen relativen Fehler $\frac{\sqrt{V}}{V}$ in der Größenordnung von 10^{-5} liegen, wenn für $w\left(\frac{\sqrt{R}}{R}\right)$, also für die durchschnittlichen Widerstandstoleranzen einen Wert von $0.5 \cdot 10^{-2}$ angesetzt wird, der etwa einer Toleranz von $\pm 1\%$ entspricht.



Spannungsgefälle →



Literaturangaben

- 1) J.N. Hummel Der scheinbare spezifische Widerstand.
Zeitschrift für Geophysik 1929, 5
- 2) R. Utzmann Die Anwendung von Modellen in der
elektrischen Prospektion.
Freiburger Forschungshefte C 60
- 3) E. Kettel Übersicht über die Technik der
elektronischen Analogrechner.
Telefunkenzeitschrift 116, Juni 1957
- 4) Stefanescu und Sur la distribution électrique
Schlumberger potentielle autour d'une prise de terre
ponctuelle dans un terrain à couches
horizontales, homogènes et isotropes.
Journal de Physique 1930
- 5) S. Gerschgorin Zeitschrift für angewandte Mathematik
und Mechanik 1930, 10/373-382
- 6) D. Ernst Elektronische Analogrechner.
R. Oldenburg, München 1960
- 7) G. Liebmann Solution of Partial Differential
Equations with a Resistance Network
Analogue.
British Journal of Applied Physics 1/1950
- 8) J.N. Hummel Der scheinbare spezifische Widerstand
bei vier planparallelen Schichten.
Zeitschrift für Geophysik 1929, 5
- 9) H. Guyod Electric Analogue of Resistivity
Logging.
Geophysics 3/1955
- 10) K. Deppermann Die Abhängigkeit des scheinbaren
Widerstandes vom Sondenabstand bei
der Vierpunktmethode.
Geophysical Prospecting 1954,
Sitzungsbericht der Kopenhagener
Tagung vom Mai 1954
- 11) P. Lasfragues Prospection électrique par courants
continus.
Masson & Cie., Paris 1957
- 12) G. Joos Lehrbuch der theoretischen Physik,
AVG Leipzig 1956

- 13) J.C. Francken Das Widerstandsnetzwerk, ein einfaches
und genaues Hilfsmittel zur Beschreibung
von Potentialverteilungen.
Philips' Technische Rundschau 1/1959-60

- 14) Compagnie Abaques de sondage électrique.
Générale de Geophysical Prospecting Dec. 1954
Géophysique

- 15) K. Küpfmüller Einführung in die theoretische
Elektrotechnik.
Springer-Verlag 1957

- 16) L. Collatz Numerische Behandlung von Differential-
gleichungen.
Springer-Verlag 1955

- 17) W.H. Westphal Physikalisches Praktikum.
Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1959

Tabelle der Abkürzungen

$f = f(x, y, z)$	Potentialfunktion
$f_o, f_P, f_Q, f_R,$ f_S, f_T, f_U	Potentialwerte an den betreffenden Punkten o bis U
$R_P, R_Q, R_R, R_S,$ R_T, R_U	Widerstandswerte der Widerstände, die zu den Punkten P bis U führen Dimension: Ohm
R_{zyl}	Widerstandswert im rotations- symmetrischen System Dimension: Ohm
δR	kleine Widerstandsänderung Dimension: Ohm
$\eta = \frac{\delta R}{R}$	relative Fehlergröße der betreffenden Widerstände R
	spezifischer Widerstand Dimension: Ohmmeter
R_s	scheinbarer spezifischer Widerstand Dimension: Ohmmeter
j	Stromdichte Dimension: Ampere pro Flächeneinheit
I	Stromstärke Dimension: Ampere
$\mathcal{E}$	Feldstärke Dimension: Volt pro Längeneinheit
σ	Leitfähigkeit Dimension: Siemens
C^*	geometrische Konstante Dimension: Meter
$k_1; k_2$	Quotienten der spezifischen Widerstände
dr	Wegelement
$r_1; r_2$	Radienangaben im rotationssymmetrischen System Dimension: Meter
D	Differenzenoperator

M	Mittelpunkt
P	Potentialsonde
$S_{1,r}^n$	linke bzw. rechte Stromelektrode
L/2	Mittelpunktsabstand der Strom- elektroden Dimension: Meter
a/2	Mittelpunktsabstand der Potential- sonden Dimension: Meter
h	Gitterkonstante
V	Spannungsangabe zwischen zwei Punkten Dimension: Volt
ΔV	Potentialdifferenz zwischen zwei Knotenpunkten im Netzwerk Dimension: Volt
δV	kleine Spannungsangabe Dimension: Volt
G	kleine Potentialdifferenz Dimension: Volt
$w(\frac{\delta R}{R})$; $w(\frac{\delta V}{V})$	durchschnittliche Abweichungen der Werte $\frac{\delta R}{R}$ bzw. $\frac{\delta V}{V}$
a, b, c	Maßangaben für Länge, Breite und Tiefe eines Quaders
A, B, C	Anzahl der Widerstände in den Richtungen a, b und c
m, n, o	allgemeine Koordinatenangaben für einen Punkt im Netzwerk
H_0	Widerstandsichte Dimension: Ohm pro Fläche
Skt	Skalenteile

Zum Inhalt

Kurze Beschreibung des Schlumberger-Verfahrens	2
Lösung des Potentialproblems nach Hummel	4
Erklärung des scheinbaren spezifischen Widerstandes	10
Lösung des Potentialproblems nach Stefanescu und Schlumberger	11
Zum Begriff der Analogie	15
Ableitung einer Differenzengleichung aus der Laplace schen Differentialgleichung	16
Aufbauprinzip und Konstruktionsangaben zum Netzwerk	25
Zur Parallelverschiebung von Widerstandskurven	34
Diskussion der Meßergebnisse	36
Vergleiche der Zweischicht-Sollkurven H_1 und H_2 mit den entsprechenden Netzwerkkurven 1' und 2'	37
Die Netzwerk-Dreischichtkurve	41
Abschätzung des effektiven Leitungsquerschnittes bei Kurzschlußstörungen	48
Durch langgestreckte Störungen (Störleitungen) beeinflusste Zweischichtkurven	52
Durch kleine, gedrungene Störkörper beeinflusste Zweischichtkurven	60
Durch großräumige Störungen beeinflusste Zweischichtkurven	65
Messung mit vertauschten Sonden und Elektroden	69
Betrachtungen über die Eindeutigkeit der Potentialkurven	71
Anhang	73
Literaturangaben	76
Tabelle der Abkürzungen	78

Diese Arbeit wurde im Institut für Meteorologie und Geophysik der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. R. Mügge angefertigt. Ich möchte deshalb Herrn Professor Mügge für seine mir während der Arbeiten am Netzwerk gewährte Unterstützung und für seine Ratschläge, die mir bei der Abfassung dieser Arbeit eine große Hilfe waren, herzlich danken.

Mein Dank gebührt auch Herrn Prof. Dr. H. Dänzer für seine wertvollen Hinweise zum theoretischen Teil der Arbeit.

Auch dem Wissenschaftlichen Rat des Institutes für Meteorologie und Geophysik, Herrn Dr. G. Mattern, möchte ich an dieser Stelle danken. Herr Dr. Mattern machte mich auf die Möglichkeit aufmerksam, geoelektrische Probleme mit einem derartigen Netzwerk zu lösen und unterstützte mich bei der Planung und beim Aufbau des Netzwerkes tatkräftig.

Heinz Salamon

Lebenslauf

Ich, Heinz Salamon, wurde als Sohn des Verwaltungssekretärs Hans Salamon und seiner Ehefrau Erika, geb. Siebert, am 23. Juli 1934 in Berlin-Karlshorst geboren.

Meine Eltern verzogen 1939 von Berlin nach Bad Freienwalde an der Oder, wo ich im Herbst 1941 eingeschult wurde. Im Januar 1945 wurden wir von dort nach Mücheln im Bezirk Halle an der Saale evakuiert. Hier beendete ich die Volksschulzeit und besuchte anschließend die Oberschule bis zum Mai 1953. Nach bestandenem Abitur bekam ich zum September 1953 einen Studienplatz für Geophysik an der Humboldt-Universität in Berlin. Dort habe ich 6 Semester studiert.

In den Sommersemesterferien habe ich durch Praktikantentätigkeit bei der Firma Geodienst in Leipzig und am Institut für Ionosphärenforschung in Kühlungsborn an der Ostsee meine Studien ergänzt.

Am 16. August 1956 erhielt ich aus Gründen der Familienzusammenführung durch das Notaufnahmелager Gießen die Erlaubnis zum ständigen Aufenthalt in der Bundesrepublik. Seit dieser Zeit wohnte ich zunächst bis zum Mai 1957 in Kettenbach im Taunus und verzog dann nach Bad Homburg v.d.H.

Durch die Zulassung zum Studium an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt für das Wintersemester 1956/57 konnte ich das begonnene Studium ohne Unterbrechung fortsetzen und mit dem Diplom für Geophysik am 13. Feb. 1958 beenden.

Zum April 1958 bekam ich eine Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Firma Prakla, Gesellschaft für praktische Lagerstättenforschung GmbH., in Hannover und war bis zum Mai 1959 im Außendienst dieser Firma tätig. Während dieser Zeit sind meine Bindungen zum Institut für Meteorologie und Geophysik der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt durch briefliche und persönliche Kontakte erhalten geblieben, und es entstanden daraus die Pläne für meine Dissertation. Im Juni 1959 zog ich mir, bedingt durch den Außendienst, eine Lungenentzündung zu, die zu Bronchialasthma führte. Erst ein Jahr später konnte ich meine Arbeit wieder aufnehmen.

Auf Grund eines Stipendiums der Deutschen Forschungsgemeinschaft war es mir möglich, die geplanten Untersuchungen für die Dissertation unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. R. Mügge fortzusetzen und zu beenden.

Heinz Salamon

